

FIN ↘

2024–2025 / Lycée Pasteur / MSPI 1

Mathématiques

DM16 pour mercredi 14/05

(avec corrigé)

Table des matières

Exercice 1	2
Exercice 2	10
Exercice 3	15

Exercice 1. On appellera « graphe » tout dessin du type de l'un des deux exemples G_1 (ci-dessous) et G_2 (en page 2). Les sommets du graphe sont les cercles numérotés (de 1 à 3 dans le premier exemple, de 1 à 5 dans le second). Les flèches du graphe sont les flèches reliant deux sommets. On remarquera les points suivants :

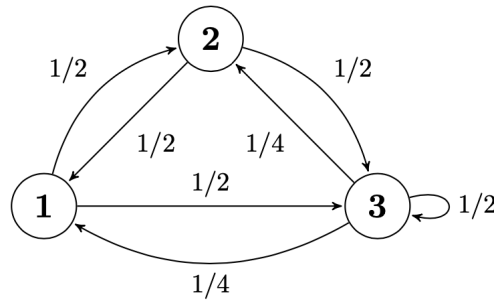
- ▷ entre deux sommets distincts i et j , on peut avoir une flèche de i vers j et une de j vers i
- ▷ certains couples de sommets ne sont pas reliés par une flèche (par exemple 1 et 4 dans le graphe G_2)
- ▷ une flèche peut relier un sommet à lui-même (c'est le cas du sommet 3 de G_1) ;
- ▷ pour tout couple (i, j) de sommets, la flèche allant de i à j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0, 1]$, représentant une probabilité de saut (par exemple $s_{3,1} = \frac{1}{4}$ et $s_{3,3} = \frac{1}{2}$ dans le graphe G_1)
- ▷ pour tout sommet i , la somme des probabilités étiquetant les flèches partant de i vaut 1.

Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet i d'un graphe G . Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ sur un autre sommet de G en suivant une des flèches partant de i , la probabilité qu'elle suive la flèche de i vers j étant égale à $s_{i,j}$. On poursuit ainsi le processus, la particule sautant à chaque instant suivant, $n = 2, 3, 4 \dots$ du sommet du graphe où elle se trouve vers un nouveau sommet (éventuellement le même) en suivant aléatoirement l'une des flèches selon les probabilités indiquées.

On suppose que les sommets du graphe G sont numérotés de 1 à m . Le processus décrit ci-dessus définit une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \dots, m\}$ telle que pour tout n on a $X_n = k$ si la particule se trouve sur le sommet k du graphe G après le $n^{\text{ème}}$ saut. $\mathcal{A}$ est appelée marche aléatoire sur le graphe G .

On étudie dans cette question quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1 ci-dessous.

Une remarque : partie vraiment peu théorique, mais très calculatoire : **attention à la manière de mener les calculs !**



Graphe G_1

1. On considère la marche aléatoire sur G_1 partant de $X_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le

vecteur colonne $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. En appliquant la formule des probabilités totales

au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n , établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = AY_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$. On sait qu'à l'instant n , la particule est en 1, 2 ou 3, donc $(\{X_n = 1\}, \{X_n = 2\}, \{X_n = 3\})$ est un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = i) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = 1) \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = 2) \mathbb{P}(X_n = 2) \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = i | X_n = 3) \mathbb{P}(X_n = 3). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(X_n = 3) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = AY_n,$$

$$\text{avec } A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que, pour tout n entier naturel, $Y_n = A^n Y_0$.

On démontre le résultat par récurrence sur n :

Initialisation. $Y_0 = A^0 Y_0$ car $A^0 = I_3$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $Y_n = A^n Y_0$. Alors, par la question précédente, $Y_{n+1} = AY_n = A \times A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0$, d'où l'hérédité et le résultat.

3. Donner, pour $n \geq 1$, $P(X_n = 3)$. Justifier votre réponse.

Soit $n \geq 1$. Alors

$$\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 3)) = \frac{1}{2},$$

car X_{n-1} est à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$, donc $\mathbb{P}(X_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 2) + \mathbb{P}(X_{n-1} = 3) = 1$.

Ainsi, $(\mathbb{P}(X_n = 3))_{n \geq 1}$ est constante égale à $\frac{1}{2}$.

4. a. Calculer A^2 , puis $A^2 \times (2A - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3). En déduire la relation $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.

On calcule

$$A^2 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 A^2 \times (2A - I) &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \times \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} = A.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $2A^3 = A^2 + A$, donc $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.

- b.** En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.

On démontre la proposition par récurrence sur n .

Initialisation. $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$. On pose $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie. Alors on dispose de u_n et v_n tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$. Mais alors

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A \times A^n \\
 &= u_n A^3 + v_n A^2 \\
 &= u_n \left(\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A \right) + v_n A^2 \\
 &= \frac{u_n + 2v_n}{2} A^2 + \frac{u_n}{2} A.
 \end{aligned}$$

On pose alors $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n}{2}$. On en déduit alors le résultat !

Donc la proposition est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}$.

c. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n .

On remarque assez facilement que si $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n + v_n)$ est constante égale à $u_0 + v_0 = 1$. On en déduit donc que, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{1 - v_n}{2}.$$

Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On cherche c tel que $c = \frac{1 - c}{2}$. On trouve $c = \frac{1}{3}$. Donc $(v_n - c)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$, donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(v_1 - c) + c = \frac{(-1)^{n-1}}{3 \times 2^{n-2}} + \frac{1}{3},$$

et

$$u_n = 1 - v_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3 \times 2^{n-2}}.$$

5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul la loi de X_n .

On en déduit donc que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Y_n &= A^n Y_0 \\ &= (u_n A^2 + v_n A) Y_0 \\ &= u_n \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_n \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} u_n \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

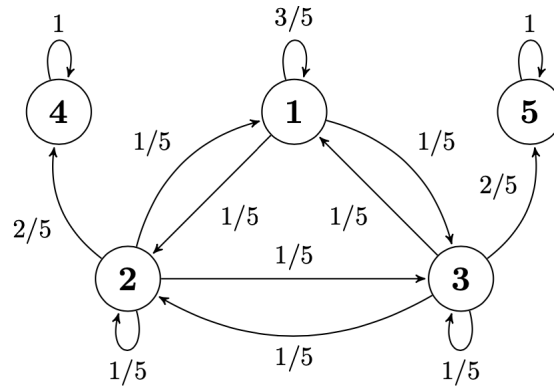
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{8}u_n = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{8}u_n + \frac{1}{2}v_n \stackrel{u_n+v_n=1}{=} \frac{1}{8} + \frac{3}{8}v_n = \frac{1}{8} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n+1}} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n = \frac{1}{2}.$$

(on vérifie bien que la somme des trois probabilités donne 1)

On considère maintenant une marche aléatoire $\mathcal{A}_2 = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le graphe G_2 ci-dessous.



Graphe G_2

On constate que lorsque la particule atteint le sommet 4 ou le sommet 5, elle y reste ensuite indéfiniment avec une probabilité 1 : ces deux sommets sont dits absorbants. On dit que la marche aléatoire est absorbée en 4 ou en 5 lorsqu'elle atteint le sommet correspondant. On s'intéresse ici à la probabilité pour $\mathcal{A}_2$ d'être absorbée en 4 ou en 5 en fonction de son point de départ. Pour tout couple d'entiers (i, j) avec $1 \leq i \leq 5$ et $4 \leq j \leq 5$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = i$.

6. Donner les valeurs des $a_{i,j}$ dans le cas particulier $(i, j) \in \{4, 5\}^2$.

Si la particule est en 4, elle reste en 4 donc est absorbée par 4 et ne peut être absorbée par 5 donc $a_{44} = 1$ et $a_{54} = 0$.

De même, $a_{55} = 1$ et $a_{45} = 0$.

7. En distinguant les cas selon le résultat du prochain saut de la particule, montrer que

$(x, y, z) = (a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est un triplet solution du système

$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} = y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = z \end{cases}$$

Résoudre le système.

On note B_4 l'événement « la particule est absorbée en 4 ». Si $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$,

$$a_{i4} = \mathbb{P}(B_4 | X_0 = i) = \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4).$$

Or, $\{X_1 = 1\}, \{X_1 = 2\}, \{X_1 = 3\}, \{X_1 = 4\}, \{X_1 = 5\}$ est un système complet d'événements. Donc, par la formule des probabilités totales,

$$a_{i4} = \sum_{k=1}^5 \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \cap X_1 = k)$$

Mais

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \cap X_1 = k) &= \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap \{X_1 = k\} \cap \{X_0 = i\})}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{\{X_1=k\} \cap \{X_0=i\}}(B_4) \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = k) \mathbb{P}(X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \mathbb{P}_{\{X_1=k\} \cap \{X_0=i\}}(B_4) \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = k), \end{aligned}$$

par la formule des probabilités composées.

Or,

$$\mathbb{P}_{\{X_1=k\} \cap \{X_0=i\}}(B_4) = \mathbb{P}_{\{X_1=k\}}(B_4),$$

car l'absorption en 4 dépend uniquement de la dernière position connue de la particule.

De plus, la marche aléatoire étant invariante par translation (le résultat ne change pas

si on la commence à 1 plutôt qu'à 0), on peut aussi dire que $\mathbb{P}_{\{X_1=k\}}(B_4) = a_{k,4}$. Ainsi,

$$a_{i4} = \sum_{k=1}^5 \mathbb{P}_{X_0=i}(X_1 = k) a_{k4}, \text{ d'où } \begin{cases} a_{14} = \frac{3}{5}a_{14} + \frac{1}{5}a_{24} + \frac{1}{5}a_{34} \\ a_{24} = \frac{1}{5}a_{14} + \frac{1}{5}a_{24} + \frac{1}{5}a_{34} + \frac{2}{5} \\ a_{34} = \frac{1}{5}a_{14} + \frac{1}{5}a_{24} + \frac{1}{5}a_{34} \end{cases}$$

D'où le système demandé. On résout alors, en posant $(x, y, z) = (a_{14}, a_{24}, a_{34})$.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 4y + z = -2 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y - 4z = 0 & L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x - 4y + z = -2 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ -5y + 5z = -2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y - 7z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + y - 4z = 0 \\ -5y + 5z = -2 \\ -4z = -\frac{6}{5} & L_3 \leftarrow L_3 + \frac{3}{5}L_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $a_{3,4} = z = \frac{3}{10}$, $a_{2,4} = y = \frac{7}{10}$ et $a_{1,4} = x = \frac{1}{2}$.

8. Donner, par un argument sur la géométrie du graphe ne nécessitant aucun calcul supplémentaire, les valeurs de $(a_{1,5}, a_{2,5}, a_{3,5})$

On remarque que le graphe est symétrique entre 4 et 5 si on inverse 2 et 3. Ainsi, $a_{1,5} = \frac{1}{2}$, $a_{2,5} = \frac{3}{10}$ et $a_{3,5} = \frac{7}{10}$.

9. Montrer que la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée (en 4 ou en 5 indifféremment) est égale à 1, quel que soit son point de départ.

On note B_5 l'événement « la particule est absorbée en 5 ». On cherche, si i dans $\llbracket 1, 5 \rrbracket$, $\mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \sqcup B_5)$. Par union disjointe, $\mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \sqcup B_5) = \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4) + \mathbb{P}_{X_0=i}(B_5) = a_{i4} + a_{i5}$.
Or,

- ▷ $a_{14} + a_{15} = 1/2 + 1/2 = 1$,
- ▷ $a_{24} + a_{25} = 7/10 + 3/10 = 1$,
- ▷ $a_{34} + a_{35} = 3/10 + 7/10 = 1$,
- ▷ $a_{44} + a_{45} = 1 + 0 = 1$,
- ▷ $a_{45} + a_{55} = 0 + 1 = 1$.

Ainsi, quel que soit i , $\mathbb{P}_{X_0=i}(B_4 \sqcup B_5) = 1$, ce qui est le résultat recherché.

10. On suppose que la loi de X_0 est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on constate que $\mathcal{A}_2$ est absorbée en 4. Quelle est la probabilité qu'elle soit partie du sommet 3?
-

On recherche $\mathbb{P}_{B_4}(X_0 = 3)$. On utilise la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{B_4}(X_0 = 3) &= \frac{\mathbb{P}(B_4 \cap \{X_0 = 3\})}{\mathbb{P}(B_4)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{X_0=3}(B_4) \mathbb{P}(X_0 = 3)}{\sum_{i=1}^3 \mathbb{P}_{X_0=i}(B_4) \mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \frac{a_{34} \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}(a_{14} + a_{24} + a_{34})} \\ &= \frac{a_{34}}{a_{14} + a_{24} + a_{34}} = \frac{3}{5 + 7 + 3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}_{B_4}(X_0 = 3) = \frac{1}{5}$.

Exercice 2 (Un peu de marches aléatoires). Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i.i.d., à valeurs dans $\{-1, 1\}$, telles que

$$\mathbb{P}(X_1 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$. Donner la loi de Y_k .
-

Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Quand $X_k = -1$, $Y_k = 0$ et quand $X_k = 1$, $Y_k = 1$. Donc Y_k prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$ donc Y_k suit une loi de Bernoulli. Or,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{1}{2}.$$

Donc $X_k \sim \mathcal{B}(1/2)$.

2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On pose $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Donner la loi de T_n et en déduire celle de S_n . Donner l'espérance et la variance de S_n .
-

Par la question précédente, T_n est une somme de n variables de Bernoulli indépendantes donc suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$. Mais comme, par un simple calcul,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (X_k + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n X_k + \frac{n}{2} = \frac{S_n + n}{2},$$

on en déduit que $S_n = 2T_n - n$. Donc S_n prend ses valeurs dans $\{2k - n, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ et pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(S_n = 2k - n) = \mathbb{P}(T_n = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n}.$$

On déduit, par la formule $S_n = 2T_n - n$, et par linéarité de l'espérance, que

$$\mathbb{E}(S_n) = 2\mathbb{E}(T_n) - n = 2n \frac{1}{2} - n = n - n = 0,$$

et que

$$\mathbb{V}(S_n) = 4\mathbb{V}(T_n) = 4n \frac{1}{2} \frac{1}{2} = n.$$

3. Déterminer en particulier un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

On en déduit que $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}$. Or, par l'équivalent de Stirling,

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2}{\pi} 2^{2n} W_{2n} \sim \frac{2}{\pi} 2^{2n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}},$$

donc

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

4. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\mathbb{P}\left(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \leq \frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})^2},$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \leq \frac{n}{n^{1+2\varepsilon}} = \frac{1}{n^{2\varepsilon}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)$ converge, et donner sa limite.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\sum_{k=1}^n \frac{tX_k}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\frac{tX_1}{\sqrt{n}}}\right)^n \text{ par indépendance et car les } (X_k) \text{ suivent toutes la même loi} \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{\frac{-t}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{\frac{t}{\sqrt{n}}}\right)^n \text{ par la formule de transfert} \\ &= \left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \\ &= e^{n \ln \operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.\end{aligned}$$

Or,

$$\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{t^2}{2n},$$

donc $n \ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{2}$, donc

$$\mathbb{E}\left(e^{t \frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{t^2}{2}}.$$

6. Calculer $P(S_1 = a, S_{2n} = 2b)$ pour tout $(a, b) \in \{1, -1\} \times \llbracket -n, n \rrbracket$.

On écrit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 = a, S_{2n} = 2b) &= \mathbb{P}(S_1 = a, X_1 + X_2 + \cdots + X_{2n} = 2b) \\ &= \mathbb{P}(S_1 = a, X_2 + \cdots + X_{2n} = 2b - a) \\ &= \mathbb{P}(S_1 = a) \mathbb{P}(X_2 + \cdots + X_{2n} = 2b - a) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2b - a) \\ &\quad (\text{car } X_1 + \cdots + X_{2n-1} \text{ et } X_2 + \cdots + X_{2n} \text{ ont même loi}) \\ &= \frac{1}{2} \binom{2n-1}{b+n-\frac{1+a}{2}} \frac{1}{2^{2n-1}} = \binom{2n-1}{b+n-\frac{1+a}{2}} \frac{1}{2^{2n}}\end{aligned}$$

7. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On considère A_k l'événement

$$A_k = \{S_1 = 1\} \cap \{S_{2n} = 2k\} \cap \{\exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, S_{2i} = 0\}.$$

Démontrer que $\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(S_1 = -1, S_{2n} = 2k)$.

Pour cela, on fera un dessin, et, en considérant le plus petit i tel que $S_{2i} = 0$ et à l'aide d'une réflexion par rapport à l'axe des abscisses, on montrera que les trajectoires correspondant à l'événement A_k sont en bijection avec les trajectoires partant de -1 et arrivant à $2k$ en $2n$.

La probabilité de A_k est égale à $\frac{a_k}{2^{2n}}$, où a_k est le nombre de chemins partant de 1 en 1, arrivant à $2k$ en $2n$ et passant au moins une fois par 0. Notons $\mathcal{A}_k$ cet ensemble.

Notons aussi $\mathcal{B}_k$ l'ensemble des chemins partant de -1 en 1, arrivant à $2k$ en $2n$.

Alors $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ sont en bijection

En effet, si l'on prend l'application $\varphi : \mathcal{A}_k \rightarrow \mathcal{B}_k$, qui à un chemin $(c_1 = 1, c_2, \dots, c_{2n})$ de $\mathcal{A}_k$ associe le chemin suivant : si $i_0 = \min\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, c_i = 0\}$,

$$\varphi((c_1, \dots, c_{i_0}, c_{i_0+1}, \dots, c_{2n})) = (-c_1, \dots, -c_{i_0}, c_{i_0+1}, \dots, c_{2n}),$$

alors φ va bien de $\mathcal{A}_k$ dans $\mathcal{B}_k$, et son inverse a la même expression !

$$\text{Ainsi, } \mathbb{P}(S_1 = -1, S_{2n} = 2k) = \frac{\text{Card}(\mathcal{B}_k)}{2^{2n}} = \frac{\text{Card}(\mathcal{A}_k)}{2^{2n}} = \mathbb{P}(A_k).$$

8. Montrer que, pour $n \geq 1$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2k) = \frac{k}{n} P(S_{2n} = 2k).$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2k) \\ & + \mathbb{P}(S_1 = 1, \exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ t.q. } S_{2i} = 0, S_{2n} = 2k) \\ & = \mathbb{P}(S_1 = 1, S_{2n} = 2k), \end{aligned}$$

car $S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0$ et $\exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ t.q. $S_{2i} = 0$ sont deux événements contraires.

Or,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(S_1 = 1, S_{2n} = 2k) &= \binom{2n-1}{k+n-1} \frac{1}{2^{2n}} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{(k+n-1)!(n-k)!} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{k+n}{2n} \binom{2n}{n+k} \\
 &= \frac{k+n}{2n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k).
 \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{P}(S_1 = 1, \exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ t.q. } S_{2i} = 0, S_{2n} = 2k) \\
 &= \mathbb{P}(S_1 = -1, S_{2n} = 2k) \\
 &= \binom{2n-1}{k+n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)!}{(k+n)!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{1}{2^{2n}} \frac{n-k}{2n} \binom{2n}{k+n} = \frac{n-k}{2n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 &P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 2k) \\
 &= \mathbb{P}(S_1 = 1, S_{2n} = 2k) - \mathbb{P}(S_1 = 1, \exists i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \text{ t.q. } S_{2i} = 0, S_{2n} = 2k) \\
 &= \frac{k+n-(n-k)}{2n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \frac{k}{n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k).
 \end{aligned}$$

9. Montrer enfin que

$$P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} P(S_{2n} = 0)$$

et que

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = P(S_{2n} = 0).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} = 2k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \mathbb{P}(S_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n \frac{k}{2n} \binom{2n}{n+k}.
 \end{aligned}$$

On peut remarquer que $\frac{2k}{2n} \binom{2n}{n+k} = \binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}$. Donc

$$\begin{aligned} P(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n \left(\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n-1}{n} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n} = 0). \end{aligned}$$

Le dernier résultat s'ensuit par symétrie !

Exercice 3. Soit $(G, *)$ un groupe abélien fini, X une variable aléatoire uniforme sur G , Y une variable aléatoire quelconque sur G , indépendante de X . Démontrer que $X * Y$ est uniforme sur G .

Soit $g \in G$. Alors $\{X = h\}_{h \in G}$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X * Y = g) &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(X * Y = g, X = h) \\ &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(Y = h^{-1} * g, X = h) \\ &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(Y = h^{-1} * g) \mathbb{P}(X = h) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{h \in G} \mathbb{P}(Y = h^{-1} * g) \frac{1}{\text{Card}(G)} \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \sum_{k \in G} \mathbb{P}(Y = k) \text{ car } h \mapsto h^{-1}g \text{ est une bijection de } G \\ &= \frac{1}{\text{Card}(G)} \text{ car } Y \text{ est à valeurs dans } G \end{aligned}$$

Donc $X * Y$ est uniforme. Étonnant, non ?

DEBUT ↖