En questions de cours
Probabilités

20.1 ESPACE PROBABILISABLE FINI

1. Définition d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$; univers ; ensemble des événements, événements élémentaires ; aléa, ou issue, ou réalisation.

2. Définition dans $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ d'une paire d'événements disjoints.

20.2 PROBABILITÉS SUR UN ESPACE PROBABILISÉ FINI

3. Définition d'une probabilité P sur un espace probabilisable fini (univers fini), ou mesure de probabilité : fonction de l'ensemble des événements dans la demi-droite des réels positifs qui est additive et qui attribue à l'univers la valeur 1.

4. Probabilité de la réunion d'une famille finie d'événements disjoints, ou incompatibles, entre eux.

5. Probabilité de l'événement vide, d'un événement contraire, majoration de toute probabilité par $1 = 100\%$.

6. Définition d'un événement presque sûr, d'un événement négligeable relativement à une probabilité.

20.3 DISTRIBUTIONS DE PROBABILITÉS

7. Définition d'une distribution de probabilités sur un ensemble fini comme une famille de réels positifs indexée par cet ensemble fini qui est de somme égale à 1.

8. Relation entre les probabilités sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ et les distributions de probabilités sur Ω.

9. Définition de la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, distribution de probabilités Ω associée.

10. Définition de l'équiprobabilité d'un couple d'événements de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ relativement à une probabilité P.

11. Caractérisation de la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ en termes d'équiprobabilité.

20.4 ESPACES PROBABILISÉS FINIS

12. Définition d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, noté (Ω, P).

13. Probabilité de la différence d'un couple d'événements. Croissance.

14. Probabilité de la réunion de deux événements.

15. Probabilité de réunion d'une famille finie d'événements : inégalité.

20.5 PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

16. Définition dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, de la probabilité conditionnelle sachant un événement non négligeable.

17. Formule des probabilités composées pour la conjonction d'un couple d'événements : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Convention lorsque le premier événement est négligeable. Interprétation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.

18. Extension de la formule des probabilités composées à la probabilité de la conjonction d'une liste d'événements.

19. Définition d'un système complet d'événements dans l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ (*ce n'est pas nécessairement une partition de l'univers* Ω).

20. Décomposition d'un événement selon un système complet d'événements.

21. Formules des probabilités totales pour le calcul d'un probabilité par disjonction de cas. Interprétation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.

22. Formule de Bayes pour l'inversion d'un conditionnement. Interprétation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.

20.6 VARIABLES ALÉATOIRES : LOIS ET DISTRIBUTIONS

23. Définition d'une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Notations $\{X \in A\}, \{X = a\}, \{X \leqslant a\}$.

24. Lien entre l'événement A et la v.a. $\mathbb{1}_A$.

25. Définition de la loi sur E d'une v.a. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$: probabilité P_X induite par P et X sur l'espace probabilisable fini $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega))$.

26. Définition d'une distribution finie de probabilités sur un ensemble quelconque comme une famille de réels positifs indexée par cet ensemble quelconque qui est à support fini et de somme égale à 1.

27. Relation entre les lois de probabilités sur E et les distributions de probabilités sur E lui-même : la loi d'une v.a. dans E est déterminée par sa distribution de probabilités sur E ; i.e. si deux v.a. dans E admettent la même distribution de probabilités sur E, alors elles suivent la même loi.

28. Définition de la relation d'équivalence en loi entre les v.a. dans le même ensemble $E : X \sim Y$.

29. Définition d'une v.a. image par une fonction.

30. Images, par une même fonction, de deux v.a. équivalentes en loi.

20.7 LOIS FINIES USUELLES

31. Variable aléatoire dans un ensemble fini non vide E, de loi uniforme sur E. Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$. Terminologie : variable uniforme.

32. Variable aléatoire dans $\{0; 1\}$, de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Terminologie : variable de Bernoulli. Modélisation du nombre aléatoire de succès dans une expérience de Bernoulli à une seule épreuve.

33. Variable aléatoire dans $\{0; 1; \dots; n-1; n\}$, de loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Terminologie : variable binomiale.

20.8 LOIS ET COUPLAGES

34. Définition de loi conditionnelle d'une v.a. X sachant un événement A non négligeable.

35. Définition d'un couple (X, Y) de v.a. comme une v.a. à valeurs dans un ensemble produit $E \times F$. Notations permises : $P(X \in A, Y \in B)$ pour $P((X, Y) \in A \times B)$ et $P(X = x, Y = y)$ pour $P((X, Y) = (x, y))$...

En exercices

Dénombrement, sommes et produits finis

Dénombrement
Voir programme 25 du lundi 28 avril.

Sommes et produits
Associativité générale, commutativité générale et groupement par paquets ; distributivité générale, sommes de référence, formules de Bernoulli et du binôme.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Probabilité de la réunion d'une famille finie d'événements disjoints, ou incompatibles, entre eux.

2. Relation entre les probabilités sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ et les distributions de probabilités sur Ω.

3. Caractérisation de la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ en termes d'équiprobabilité.

4. Probabilité de réunion d'une famille finie d'événements : inégalité.

5. Extension de la formule des probabilités composées à la probabilité de la conjonction d'une liste d'événements.

6. Formules des probabilités totales pour le calcul d'un probabilité par disjonction de cas.

7. Relation entre les lois de probabilités sur E et les distributions de probabilités sur E lui-même : si deux v.a. dans E admettent la même distribution de probabilités sur E, alors elles suivent la même loi.

8. Images, par une même fonction, de deux v.a. équivalentes en loi : $X \sim Y \Rightarrow f(X) \sim f(Y)$.