20.1 Espace probabilisable fini

1. Définition d'un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$; univers ; ensemble des événements, événements élémentaires ; aléa, ou issue, ou réalisation.

2. Définition dans $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ d'une paire d'événements disjoints.

20.2 Probabilités sur un espace probabilisé fini

3. Définition d'une probabilité P sur un espace probabilisable fini (univers fini), ou mesure de probabilité : fonction de l'ensemble des événements dans la demi-droite des réels positifs qui est additive et qui attribue à l'univers la valeur 1.

4. Probabilité de la réunion d'une famille finie d'événements disjoints, ou incompatibles, entre eux.

5. Probabilité de l'événement vide, d'un événement contraire, majoration de toute probabilité par $1 = 100\%$.

6. Définition d'un événement presque sûr, d'un événement négligeable relativement à une probabilité.

20.3 Distributions de probabilités

7. Définition d'une distribution de probabilités sur un ensemble fini comme une famille de réels positifs indexée par cet ensemble fini qui est de somme égale à 1.

8. Relation un à un entre les probabilités sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ et les distributions de probabilités sur Ω.

9. Définition de la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, distribution de probabilités Ω associée.

10. Définition de l'équiprobabilité d'un couple d'événements de $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ relativement à une probabilité P.

11. Caractérisation de la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ en termes d'équiprobabilité.

20.4 Espaces probabilisés finis

12. Définition d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, noté (Ω, P).

13. Probabilité de la différence d'un couple d'événements. Croissance.

14. Probabilité de la réunion de deux événements.

15. Probabilité de réunion d'une famille finie d'événements : inégalité.

20.5 Probabilités conditionnelles

16. Définition dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$, de la probabilité conditionnelle sachant un événement non négligeable.

17. Formule des probabilités composées pour la conjonction d'un couple d'événements : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Convention lorsque le premier événement est négligeable. Interprétation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.

18. Formule étendue des probabilités composées pour la probabilité de la conjonction d'une liste d'événements.

19. Définition d'un système complet d'événements dans l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ (*ce n'est pas nécessairement une partition de l'univers* Ω).

20. Décomposition d'un événement selon un système complet d'événements.

21. Formule des probabilités totales pour le calcul d'une probabilité par disjonction de cas. Interprétation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.

22. Formule de Bayes pour l'inversion d'un conditionnement. Interprétation à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.

20.6 Variables aléatoires : lois et distributions

23. Définition d'une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Notations $\{X \in A\}, \{X = a\}, \{X \leqslant a\}$.

24. Lien entre l'événement A et la v.a. $\mathbb{1}_A$.

25. Définition de la loi sur E d'une v.a. définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$: probabilité P_X induite par P et X sur l'espace probabilisable fini $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$.

26. Définition d'une distribution finie de probabilités sur un ensemble quelconque comme une famille de réels positifs indexée par cet ensemble quelconque qui est à support fini et de somme égale à 1.

27. Relation entre les lois de probabilités sur E et les distributions de probabilités sur E lui-même : la loi d'une v.a. dans E est déterminée par sa distribution de probabilités sur E ; i.e. si deux v.a. dans E admettent la même distribution de probabilités sur E, alors elles suivent la même loi.

28. Définition de la relation d'équivalence en loi entre les v.a. dans le même ensemble E : $X \sim Y$.

29. Définition d'une v.a. image par une fonction.

30. Images, par une même fonction, de deux v.a. équivalentes en loi.

20.7 Lois finies usuelles

31. Variable aléatoire dans un ensemble fini non vide E, de loi uniforme sur E. Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$. Terminologie : variable uniforme.

32. Variable aléatoire dans $\{0; 1\}$, de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Terminologie : variable de Bernoulli. Modélisation du nombre aléatoire de succès dans une expérience de Bernoulli à une seule épreuve.

33. Variable aléatoire dans $\{0; 1; \dots; n-1; n\}$, de loi de binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Notation $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Terminologie : variable binomiale.

20.8 Lois et couplages

34. Définition de loi conditionnelle d'une v.a. X sachant un événement A non négligeable.

35. Définition d'un couple (X, Y) de v.a. comme une v.a. à valeurs dans un ensemble produit $E \times F$. Notations permises : $P(X \in A, Y \in B)$ pour $P((X, Y) \in A \times B)$ et $P(X = x, Y = y)$ pour $P((X, Y) = (x, y))$.

36. La loi conjointe et la distribution de probabilités associées, en lien avec les probabilités composées. Notation

37. Les deux lois marginales et les deux distributions de probabilités associées, en lien avec les probabilités totales.

38. Extension à une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires.

20.9 Événements indépendants

39. Définition d'un couple d'événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Cas où l'un des deux est non négligeable.

40. Définition d'une famille finie d'événements indépendants entre eux : pour toute sous-famille, la probabilité de la conjonction est égale au produit des probabilités. L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

41. Etant donné une famille finie d'événements indépendants, on obtient encore une famille finie d'événements indépendants si on substitue à l'un d'eux son événement contraire. Par récurrence, il en est de même si on substitue à un certain nombre d'entre eux leurs événements contraire.

20.10 Variables aléatoires indépendantes

42. Définition d'un couple (X, Y) de v.a. indépendantes de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

43. Caractérisation de l'indépendance d'un couple de v.a. en termes de distribution de probabilités.

44. Extension à une liste $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires. Modélisation de n épreuves aléatoires indépendantes par une liste de n v.a. indépendantes.

45. Traduction de l'indépendance des événements A_i par l'indépendance de v.a. $\mathbb{1}_{A_i}$.

20.11 Images de v.a. indépendantes

46. Images, par deux fonctions, de deux v.a. indépendantes. Lemme des coalitions : si les n v.a. $X_1, \dots, X_m, X_{m+1}, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors les images, par deux fonctions, des deux listes aléatoires $(X_1, \dots, X_m)$ et $(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi. Extension admise au cas d'un certain nombre de coalitions.

47. Somme d'une liste de v.a. de Bernoulli i.i.d. Interprétation : nombre aléatoire de succès dans un schéma de Bernoulli à n épreuves ayant chacune la probabilité p de succès.

20.12 Espérance d'une v.a. numérique

48. Définition de l'espérance d'une v.a. **numérique** (réel ou complexe) :
$E(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$. C'est un indicateur de position.

49. Définition d'une v.a. numérique centrée.

50. Transformation d'une v.a. numérique en une v.a. centrée.

51. Propriétés de l'espérance : positivité, linéarité, croissance, inégalité triangulaire.

52. Espérance d'une v.a. constante.

53. Espérance d'une v.a. de Bernoulli, binomiale. Cas d'une v.a. indicatrice.

54. (Exo) Espérance d'une v.a. uniforme sur un intervalle des entiers naturels.

55. Formule de transfert : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$. Cas où $X \in \mathbb{K}^\Omega$ et $f = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$.
Valable pour les v.a. s'exprimant comme listes de v.a.

56. Espérance du produit de deux v.a. indépendantes. Extension admise au produit d'un certain nombre de v.a. indépendantes.

20.13 Variance et écart-type d'une v.a. réelle

57. Définition de la variance et de l'écart-type d'une v.a. **réelle**. Ce sont deux indicateurs de dispersion autour de l'espérance.

58. Définition d'une variable aléatoire réelle réduite.

59. Transformation d'une v.a. réelle en une v.a. réduite, centrée réduite.

60. Variance d'une v.a. constante.

61. Variance et effet d'une transformation de la v.a. par translation, homothétie.

62. Relation entre variance et moments d'ordre un et deux.

63. Variance d'une v.a. de Bernoulli, binomiale. Cas d'une v.a. indicatrice.

20.14 Covariance d'un couple de v.a. réelles

64. Définition de la covariance d'un couple de v.a. Couple de v.a. corrélées, décorrélées.

65. (A venir dans les espaces préhilbertiens réels) La covariance est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace vectoriel réel $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

66. (Exo) Si deux formes quadratiques associées à deux formes bilinéaires symétriques sont égales, alors ces deux dernières sont égales.

67. Formule de polarisation liant variance et moments.

68. Covariance de deux v.a. indépendantes.

69. Variance de la somme d'une liste de v.a. Cas de v.a. décorrélées deux à deux.

70. Retour sur les v.a. binomiales s'exprimant comme sommes de v.a. de Bernoulli i.i.d.

20.15 Inégalités probabilistes

71. Inégalité de Markov liant probabilité d'un écart à zéro et espérance.

72. Exemple d'obtention d'inégalité de concentration.

73. Inégalités de Bienaymé-Tchebychev liant probabilité d'un écart à l'espérance et variance.

74. Moyenne de v.a. i.i.d. Interprétation fréquentiste.

75. Deux inégalités de Cauchy-Schwarz probabilistes. Coefficient de corrélation.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Relation un à un entre les probabilités sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ et les distributions de probabilités sur Ω.

2. Formule étendue des probabilités composées pour la probabilité de la conjonction d'une liste d'événements.

3. Formule des probabilités totales pour le calcul d'une probabilité par disjonction de cas.

4. Lemme des coalitions : si les n v.a. $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors les images, par deux fonctions, des deux listes aléatoires $(X_1, \ldots, X_m)$ et $(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi. Extension admise au cas d'un certain nombre de coalitions.

5. La somme d'une liste de $n \in \mathbb{N}^*$ v.a. de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in [0, 1]$ est une v.a. binomiale de paramètres (n, p) (*preuve par récurrence à l'aide du le lemme des coalitions*).

6. Preuve directe de 5. par dénombrement des « succès ».

7. Formule de transfert : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$. Valable pour les v.a. s'exprimant comme listes de v.a.

8. (Exo) $X \sim Y$ si, et seulement si, $\forall f \in \mathbb{R}^E$, $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.

9. Espérance du produit de deux v.a. numériques indépendantes. Extension admise au produit d'un certain nombre de v.a. indépendantes.

10. Variance d'une variable aléatoire binomiale.

11. Polarisation liant variance et moments : $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

12. (Exo) $X \perp\!\!\!\perp Y$ si, et seulement si, $\forall f \in \mathbb{R}^E, \forall g \in \mathbb{R}^F$, $\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\,\mathbb{E}(g(Y))$.

13. Variance de la somme d'un certain nombre de v.a. Cas de v.a. décorrélées deux à deux.

14. Inégalité de Markov : $\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,\mathbb{E}(X)$ quels que soient $X \in \mathbb{R}_+^\Omega$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

15. Moyenne de v.a. i.i.d : $\mathbb{P}(|M_n - \mu| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

16. Première inégalité de Cauchy-Schwarz probabiliste : $|\mathbb{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$. Déduction de la deuxième : $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)}$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr