FIN ↘

TD20
PROBABILITÉS
(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

1. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

Convexité de l'exponentielle et comparaison à l'approximation affine en tout point (position de la courbe relativement à toute droite tangente).

2. Soient $(A_1, \dots, A_n)$ n événements indépendants de Ω. Démontrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\right).$$

Voie 1. On transforme l'expression du membre de gauche : on commence par utiliser ce que pour tout événement, la probabilité de l'événement contraire est égale au complément dans 1 de la probabilité de cet événement.

Voie 2 (merci à GC). On transforme l'expression du membre de droite : on commence par appliquer l'inégalité de la question 1. aux réels $x = \mathbb{P}(A_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 2. Soient U et V deux variables aléatoires iid de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On note $m = \min(U, V)$ et $M = \max(U, V)$.

1. Les variables aléatoires m et M sont-elles indépendantes ?

On remarque que $\mathbb{P}(m=1, M=1) = \mathbb{P}(U=1, V=1) = \mathbb{P}(U=1)\,\mathbb{P}(V=1) = \dfrac{1}{n^2}$ et $\mathbb{P}(m=1)\,\mathbb{P}(M=1) = \mathbb{P}(m=1)\,\mathbb{P}(U=1, V=1) = \mathbb{P}(m=1)\dfrac{1}{n^2} < \mathbb{P}(m=1, M=1)$. Donc les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

2. Déterminer la loi de m, et en déduire son espérance.

Voie 1.

Soit k dans $[\![1, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(m=k) &= \mathbb{P}(U=k, V=k) + \mathbb{P}(U=k)\,\mathbb{P}(V \geqslant k+1) + \mathbb{P}(U \geqslant k+1)\,\mathbb{P}(V=k) \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\frac{n-k}{n} + \frac{n-k}{n}\frac{1}{n} \\
&= \frac{1+2(n-k)}{n^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m) &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(m=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{1+2(n-k)}{n^2}. \\
&= \frac{1+2n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1+2n}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.
\end{aligned}$$

Remarque : $m = \dfrac{U+V-|U-V|}{2}$, donc $\mathbb{E}(m) = \dfrac{1}{2}(\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(V)-\mathbb{E}(|U-V|))$.

Voie 2.

Le couple aléatoire (U,V) est à valeurs dans $[\![1,n]\!]^2$ et y prend chaque valeur avec la même probabilité (égale à $1/n^2$). Donc, par propriété de la probabilité uniforme sur un ensemble fini,

$$\forall A \subset [\![1,n]\!]^2, \quad \mathbb{P}_{(U,V)}(A) \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{P}((U,V) \in A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}([\![1,n]\!]^2)}.$$

Puis, m est à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\mathbb{P}(m \geqslant k) = \mathbb{P}((U,V) \in [\![k,n]\!]^2) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2}.$$

donc

$$\mathbb{P}(m = k) = \mathbb{P}(m \geqslant k) - \mathbb{P}(m \geqslant k+1) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}.$$

Quant à l'espérance,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(m) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(m = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \mathbb{P}(m = k) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(m \geqslant \ell) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(n-\ell+1)^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n} .
\end{aligned}$$

3. Calculer l'espérance de M sans calculer sa loi.

C'est amusant, il suffit de remarquer que $U+V=m+M$! Donc

$$\mathbb{E}(M)=\mathbb{E}(U+V-m)=\mathbb{E}(U)+\mathbb{E}(V)-\mathbb{E}(m) \text{ par linéarité.}$$

Or, $\mathbb{E}(U)=\mathbb{E}(V)=\dfrac{n+1}{2}$, donc $\mathbb{E}(M)=n+1-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}=\dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

4. Déterminer la loi de (m, M).

La loi conjointe est facile à trouver ! Déjà si $a>b$, $\mathbb{P}(m=a, M=b)=0$. Ensuite, si $a<b$, $\mathbb{P}(m=a, M=b)=\mathbb{P}(U=a, V=b)+\mathbb{P}(U=b, V=a)=\dfrac{2}{n^2}$. Enfin si $a=b$, $\mathbb{P}(m=a, M=b)=\dfrac{1}{n^2}$.

Exercice 3. Soit n dans $\mathbb{N}$ et X une v.a. à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Démontrer que $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X\geqslant k)$.

Voie 1. Pour tout entier naturel k, $\{X=k\}=\{X\geqslant k\}\setminus\{X\geqslant k+1\}$ et $\{X\geqslant k\}\supset\{X\geqslant k+1\}$; donc $\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\Big(\mathbb{P}(X\geqslant k)-\mathbb{P}(X\geqslant k+1)\Big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\,\mathbb{P}(X\geqslant k+1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X\geqslant k)-\sum_{\ell=1}^{n+1}(\ell-1)\,\mathbb{P}(X\geqslant \ell)\\
&= 0\cdot\mathbb{P}(X\geqslant 0)+\sum_{k=1}^{n}(k-(k-1))\,\mathbb{P}(X\geqslant k)+(n+1-1)\,\mathbb{P}(X\geqslant n+1)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(m\geqslant k) \quad \text{car } \mathbb{P}(X\geqslant n+1)=0.
\end{aligned}$$

Voie 2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X=k)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} \mathbb{P}(X=k) = \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant \ell)\end{aligned}$$

Voie 3 (merci à GC).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} \mathbb{P}(X=\ell)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(X=\ell)\\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell\,\mathbb{P}(X=\ell)\\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \ell\,\mathbb{P}(X=\ell) = \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini et X de loi uniforme sur $\mathcal{P}([\![1, n]\!])$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $\mathrm{Card}(X)$.

Voie 1.

La v.a. $\mathrm{Card}(X)$ est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ fixé. On a : $\mathrm{Card}(X(\omega)) = k$ équivaut à $X \in \mathscr{P}_k(n)$. Or $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(n) = 2^n$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_k(n)) = \binom{n}{k}$. Donc, comme la v.a. X est uniforme sur $\mathscr{P}(n)$,

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(\mathrm{Card}(X) = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.$$

Ainsi, $\text{Card}(X) \sim \mathscr{B}(n, 1/2$; donc

$$\Big(\mathbb{E}(\text{Card}(X)), \mathbb{V}(\text{Card}(X))\Big) = \Big(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\Big).$$

Voie 2. Pour tout ensemble E, pour toute partie finie A de E,

$$\begin{aligned}\text{Card}(A) &= \sum_{e\in A} 1 \\ &= \sum_{\substack{e\in E\\ e\in A}} 1 + \sum_{\substack{e\in E\\ e\notin A}} 0 \\ &= \sum_{\substack{e\in E\\ e\in A}} \mathbb{1}_A(e) + \sum_{\substack{e\in E\\ e\notin A}} \mathbb{1}_A(e) \\ &= \sum_{e\in E} \mathbb{1}_A(e) \ .\end{aligned}$$

Donc

$$\text{Card}(X) = \sum_{k\in[\![1,n]\!]} \mathbb{1}_X(k) \ .$$

Or les v.a. $\mathbb{1}_X(k)$ sont i.i.d. de loi $\mathscr{B}(1/2)$ (*à vérifier avec soin*). Donc la v.a. $\text{Card}(X)$ suit la loi $\mathscr{B}(n, 1/2)$. Donc

$$\left(\forall k \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}(\text{Card}(X) = k) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right) \wedge \left(\mathbb{E}(\text{Card}(X)) = \frac{n}{2}, \ \mathbb{V}(\text{Card}(X)) = \frac{n}{4}\right).$$

---

2. Déterminer l'espérance et la variance de $\displaystyle\sum_{i\in X} i$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $X_i = 1_{\{i\in X\}}$. Ainsi,

$$\sum_{i\in X} i = \sum_{i=1}^{n} iX_i \ .$$

Or les v.a. X_i sont i.i.d. de loi $\mathscr{B}(1/2)$. Donc

- par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i\in X} i\right) = \sum_{i=1}^{n} i\,\mathbb{E}(X_i) = \frac{n(n+1)}{4}.$$

- et par décorrélation deux à deux des v.a. iX_i (car elles sont deux à deux indépendantes)

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i\in X} i\right) = \sum_{i=1}^{n} i^2\,\mathbb{V}(X_i) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}.$$

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

1. On pose pour tout k entier $Y_k = X_k + X_{k+1}$. Donner la loi de Y_k, son espérance et sa variance. Donner la covariance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$. La v.a. Y_k est la somme de deux v.a. i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$; donc il s'agit d'une variable de loi $\mathscr{B}(2,p)$.
- Soit $i,j \in \mathbb{N}$ tels que $i \neq j$. Quitte à permuter, supposons $i < j$. Alors, par bilinéarité de la covariance, et ce que la covariance d'un couple de v.a. indépendantes est nulle,

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \mathrm{Cov}(X_i + X_{i+1}, X_j + X_{j+1}) = \mathrm{Cov}(X_{i+1}, X_j)\ .$$

Donc,

$$\forall i,j \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{Cov}(Y_i,Y_j) = \begin{cases} 0 \text{ si } |j-i| > 1 \\ p(1-p) \text{ si } |j-i| = 1 \\ 2p(1-p) \text{ si } |j-i| = 0 \end{cases}$$

---

2. On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$. Calculer l'espérance et la variance de T_n.

On a :

- $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(Y_1) = 2p$.
- $\mathbb{V}(T_n) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \dfrac{1}{n^2}\Big(n\cdot 2p(1-p) + 2\cdot(n-1)\cdot p(1-p)\Big) = \dfrac{2(2n-1)p(1-p)}{n^2}$.
  Aparté : la formule tient pour $n = 1$.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω, $\varepsilon > 0$. Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{e}^{-t\varepsilon}\,\mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX})$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. On a : $\{X \geqslant \varepsilon\} \subset \{e^{tX} \geqslant e^{t\varepsilon}\}$; puis la v.a. réelle e^{tX} est à valeurs positives et $e^{t\varepsilon} \in]0, +\infty[$; donc la croissance de la probabilité et l'inégalité de Markov donnent le résultat visé.

Exercice 7 (Inégalité de Paley-Zygmund). Soient X une variable aléatoire réelle positive ou nulle pour laquelle $\mathbb{E}(X^2) > 0$ et $\eta \in [0, 1]$.

1. Montrer que $\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\eta\,\mathbb{E}(X)\}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{P}(X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X))$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Scwharz et on trouve que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X\geqslant\eta\,\mathbb{E}(X)\}}\right)^2 &\leqslant \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(\mathbb{1}^2_{\{X\geqslant\eta\,\mathbb{E}(X)\}}\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{P}(X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)).\end{aligned}$$

---

2. En déduire l'inégalité de Paley-Zygmund : $P(X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)) \geqslant (1-\eta)^2 \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)) \geqslant \frac{\mathbb{E}\left(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)\}}\right)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

Or,

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)\}}) + \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \leqslant \eta\,\mathbb{E}(X)\}}) \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)\}}) + \eta\,\mathbb{E}(X),$$

donc

$$(1-\eta)\,\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(X\mathbb{1}_{\{X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)\}}),$$

donc

$$(1-\eta)^2\,\mathbb{E}(X)^2 \leqslant\leqslant \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{P}(X \geqslant \eta\,\mathbb{E}(X)),$$

d'où le résultat.

Présentation des exercices. Deux types d'exercices :

- ceux de « probabilités élémentaires » sont à faire **rapidement**, ce n'est pas le coeur du chapitre. Pour une première séance d'exercice, faire les exercices 8, 11, 12 et 13 (le reste est pour vous, si vous voulez davantage pratiquer).
- ceux de vraies probabilités. Là il faut pouvoir déterminer des lois, utliser le théorème de transfert : faites les exercices 27 et 16 par exemples. Il faut aussi pouvoir utiliser des inégalités : les exercices 31, 32 et 36 sont là pour ça !

2 Probabilité sur un ensemble fini, variables aléatoires

2.1 Exercices faisant intervenir un peu de modélisation – retour en terminale

Exercice 8. ●○○ Une urne contient n boules noires et b blanches. On tire toutes les boules sans remise. Calculer la probabilité des événements suivants

1. « La première boule tirée est noire, la deuxième est blanche. »

Ici, pas besoin de nommer des événements. La probabilité est de $\dfrac{n}{n+b} \times \dfrac{b}{n+b-1}$.

2. « On n'a jamais tiré deux fois de suite la même couleur. »

Déjà, il faut nécessairement que $b = n-1$, $b = n$ ou $b = n+1$. Ensuite,

- Si $b = n$, c'est très simple, calculons la probabilité d'avoir une alternance en commençant par « blanc » :

$$\frac{n}{2n} \times \frac{n}{2n-1} \times \frac{n-1}{2n-2} \times \cdots = \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

d'où la probabilité totale égale à $2\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$.

- Si $b = n+1$, il faut nécessairement commencer par une boule blanche, d'où une probabilité

$$\frac{n+1}{2n+1} \times \frac{n}{2n} \times \frac{n}{2n-1} \times \cdots = (n+1)\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

- Le troisième cas se traite de la même manière

Exercice 9. ●○○ On tire trois cartes dans un jeu de 32 cartes, avec 4 couleurs (cœur, carreau, pique, trèfle). Calculer la probabilité d'obtenir trois cartes qui sont soit toutes les trois de la même couleur, soit de trois couleurs différentes, sous l'hypothèse

1. d'un tirage sans remise.

Il y a $\binom{32}{3} = 32 \times 31 \times 30 = 3 \times 5 \times 31 \times 64$ tirages possibles. Dénombrons les cas favorables :

- Trois cartes de la même couleur : $4 \times \binom{8}{3} = 4 \times \dfrac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 32 \times 7$.
- Trois cartes différentes : choix de 3 couleurs parmi 4, puis choix d'une carte parmi les 8 de chaque couleur, d'où 4×8^3 possibilités.

D'où, en tout, $32 \times (7 + 64) = 32 \times 71$ possibilités. D'où une probabilité de $\dfrac{71}{30 \times 31}$.

2. d'un tirage avec remise.

Là on fait des remises, d'où $32^3 = 2^{15}$ possibilités (si on les numérote). Comptons alors les cas favorables

- Trois cartes de la même couleur : choix d'une carte parmi 32, d'une parmi 8, d'une parmi 8, d'où 2^{11} choix possibles.
- Trois cartes de couleurs différentes : choix d'une carte parmi 32, d'une parmi 24, d'une parmi 16. D'où 3×2^{12} choix possibles.

D'où une probabilité de $\dfrac{2^{11} + 3 \times 2^{12}}{2^{15}} = \dfrac{1 + 6}{2^4} = \dfrac{7}{16}$.

Exercice 10. ●◐○ On dispose de composants électroniques E de même type pour lesquels la probabilité de tomber en panne est p (indépendamment les uns des autres). On peut mettre des circuits A et B en parallèle ou en série, ce que l'on note $A||B$ et $A - B$. Si A est un circuit, on note $\mathbb{P}(A)$ la probabilité pour qu'il tombe en panne.

1. Calculer $\mathbb{P}(A||B)$ et $\mathbb{P}(A - B)$ en fonction de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

Un circuit en parallèle tombe en panne si les deux composants tombent en panne, donc $\mathbb{P}(A||B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = p^2$ (par indépendance). Pour le circuit en série, il faut calculer $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 2p - p^2 = 1 - (1-p)^2$.

---

2. Quel est le circuit le plus fiable : $(A - B)||(C - D)$ ou $(A||B) - (C||D)$?

Pour le premier circuit, $\mathbb{P}((A-B)||(C-D)) = \mathbb{P}(A-B)\,\mathbb{P}(C-D) = (2p-p^2)^2 = 4p^2-4p^3+p^4$. Pour le second,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A||B) - (C||D)) &= \mathbb{P}(A||B) + \mathbb{P}(C||D) - \mathbb{P}(A||B)\,\mathbb{P}(C||D)\\ &= p^2 + p^2 - p^4 = 2p^2 - p^4.\end{aligned}$$

Il faut alors étudier $4p^2 - 4p^3 + p^4 - (2p^2 - p^4) = 2p^2 - 4p^3 + 2p^4 = 2(p - p^2)^2 \geqslant 0$. Donc le premier circuit a davantage de chances de tomber en panne.

Exercice 11. ●●○ L'Assemblée nationale est constituée d'une proportion de p députés conservateurs, qui ne changent jamais d'avis sur quoi que ce soit, et d'une proportion de $1 - p$ députés progressistes qui changent d'avis complètement au hasard, avec probabilité r, entre deux votes successifs. Au cours d'une séance, il a été note qu'un député, choisi au hasard, a voté deux fois de suite de la même façon.

1. Quelle est la probabilité pour que ce député soit conservateur ?

Nommons C l'événement « le député est conservateur » , P « le député est progressiste », A l'événement « le débuté change d'avis entre le premier et le deuxième vote », B l'événement « le député change d'avis entre le deuxième et le troisième vote » . L'énoncé indique que

$$\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(B|C) = 0,\ \mathbb{P}(A|P) = \mathbb{P}(B|P) = r,\ \mathbb{P}(C) = p,\ \mathbb{P}(P) = 1 - p.$$

On cherche $\mathbb{P}(C|\overline{A})$. Par la formule de Bayes, $\mathbb{P}(C|\overline{A}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A}|C)\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(\overline{A})}$. Or,

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A}|C)\,\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(\overline{A}|B)\,\mathbb{P}(B) = p + (1-r)(1-p),$$

d'où $\mathbb{P}(C|\overline{A}) = \dfrac{p}{p+(1-r)(1-p)}$.

2. Quelle est la probabilité qu'il vote de la même manière la prochaine fois ?

La probabilité qu'il ne change pas d'avis au cours du second vote est

$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B} \cap C) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B} \cap P).$$

Or, $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B} \cap C) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{\mathbb{P}_C(\overline{A} \cap \overline{B})\,\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{p}{p+(1-r)(1-p)}$.
De même, $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B} \cap P) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap P)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{\mathbb{P}_P(\overline{A} \cap \overline{B})\,\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{(1-r)^2(1-p)}{p+(1-r)(1-p)}$, d'où

$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{p+(1-r)^2(1-p)}{p+(1-r)(1-p)}.$$

Exercice 12. ●◐○ Une puce se déplace sur les trois sommets A, B C d'un triangle en partant de A. À chaque instant elle fait un saut : si elle est en A alors elle va en B, si elle est en B alors elle a une chance sur deux d'aller en A et une chance sur deux d'aller en C, si elle est en C elle y reste.

1. Montrer qu'on ne peut arriver en C qu'à des instants pairs.

Pour arriver en C la puce doit venir de B, et pour être en B, la puce doit venir de A. Pour venir de A elle doit venir de B, etc.

2. Quelle est la probabilité que la puce arrive en C pour a première fois à l'instant $2n$?

Soit A_k l'événement « la puce est en A à l'instant k » , B_k l'événement « la puce est en B à l'instant k », C_k l'événement « la puce est en C à l'instant k » . On cherche $\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap B_{2n-1} \cap C_{2n})$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap B_{2n-1} \cap C_{2n}) \\
&= \mathbb{P}_{B_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap B_{2n-1}}(C_{2n}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{2n-2}}(B_{2n-1}) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap A_2}(B_3)\, \mathbb{P}_{B_1}(A_2)\, \mathbb{P}(B_1) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times 1 \\
&= \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

2.2 Événements

Exercice 13. ●●○ Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que deux événements soient indépendants est : $\mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Supposons que A et B soient indépendants. Alors A et $\overline{B}$ sont indépendants, de même que $\overline{A}$ et B, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ (par la formule des probabilités totales). Donc

$$\mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B)\, \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(\overline{B})\, \mathbb{P}(\overline{A})\, \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap B).$$

Supposons que l'égalité précédente soit vérifiée. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A)\, \mathbb{P}(B) &= (\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B))(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)) \\
&= \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\, \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A \cap \overline{B})\, \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)\, \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A \cap B)\left(\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)\right)
\end{aligned}$$

Or, $\{A\cap B, \overline{A}\cap B, A\cap \overline{B}, \overline{A}\cap\overline{B}\}$ est un système complet d'événements, donc $\mathbb{P}(A\cap\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap\overline{B})+\mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)=1$, donc $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)$.

Exercice 14 (Inégalité de Kosmanek – Lyon, Cachan MP). ●●○ Soient A et B deux événements d'un epf. Montrer que $|\,\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)|\leqslant \frac{1}{4}$.

Soit $p=\mathbb{P}(A\cap B)$. On sait que $p\leqslant\mathbb{P}(A)$ et $p\leqslant\mathbb{P}(B)$ donc $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\geqslant p^2$ donc $p-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\leqslant p-p^2$, or $p(1-p)$ atteint son maximum en $p=\frac{1}{2}$, égal à $\frac{1}{4}$, donc $\mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\leqslant\frac{1}{4}$.
Pour l'inégalité inverse, on montre que $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\leqslant\frac{1}{4}$. C'est à peu près immédiat si on écrit que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)&=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(\overline{B}))-(\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A\cap\overline{B}))\\&=\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B})-\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(A\cap\overline{B})\\&=\mathbb{P}(A\cap\overline{B})-\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B})\leqslant\frac{1}{4},\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité précédente.

D'où le résultat.

2.3 Variables aléatoires

Exercice 15. ●○○ On lance n fois une pièce, puis à nouveau n fois.

1. Quelle est la probabilité p_n d'avoir eu le même nombre de pile ?

Les deux séries de lancers sont indépendants. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de pile du premier lancer, Y celle du second. On a

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(Y=k)=\binom{n}{k}\frac{1}{2^n}.$$

On veut maintenant déterminer

$$\mathbb{P}(X=Y)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k,Y=k)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\,\mathbb{P}(Y=k)\text{ par indépendance.}$$

Donc

$$p_n=\mathbb{P}(X=Y)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n},$$

par la formule de Vandermonde.

---

2. Déterminer un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que $p_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\dfrac{(2n)!}{n!n!}$. Or, par l'équivalent de Stirling, $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$, d'où

$$\begin{aligned}p_n&\sim\frac{1}{2^{2n}}\frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\\&\sim\frac{1}{2^{2n}\sqrt{\pi n}}\left(\frac{\frac{2n}{e}}{\frac{n}{e}}\right)^{2n}\\&\sim\frac{1}{2^{2n}\sqrt{\pi n}}2^{2n}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi n}}.\end{aligned}$$

Exercice 16. ●◐○ Soient X,Y,Z trois variables aléatoires i.i.d., uniformes sur $[\![0,n]\!]$.

1. Déterminer la loi de $X+Y$.

Déjà $X+Y$ est à valeurs dans $[\![0,2n]\!]$. Ensuite, pour que $X+Y=k$ il faut que $X=j$ et $Y=k-j$. On en déduit que

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j).$$

Or, si $j\geqslant n+1$, $\mathbb{P}(X=j)=0$. Si $k-j\geqslant n+1$, $\mathbb{P}(Y=k-j)=0$. Donc

- si $k \leqslant n$, $\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{k+1}{(n+1)^2}$.
- si $k \geqslant n+1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j) \\
&= \sum_{j=k-n}^{n} \mathbb{P}(X=j)\,\mathbb{P}(Y=k-j) \\
&= \frac{2n-k+1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

---

2. Déterminer $\mathbb{P}(X+Y=Z)$.

Il suffit de sommer sur toutes les valeurs possibles de X, Y et Z.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X+Y=Z) &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X+Y=k, Z=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X+Y=k)\,\mathbb{P}(Z=k) \text{ par indépendance.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{(n+1)^2}\frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{(n+1)^3}\frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= \frac{n+2}{2(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 17. ●◐○ Soient $p \in]0,1[$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de mêmes lois définies pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ par

$\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$.

On pose pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ $\pi_k = \prod_{i=1}^{k} X_i$, $u_k = \mathbb{P}(\pi_k = 1)$ et $v_k = \mathbb{P}(\pi_k = -1)$.

1. **(i)** Montrer que pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$,

$$u_{k+1} = pu_k + (1-p)v_k \text{ et } v_{k+1} = (1-p)u_k + pv_k$$

On remarque que pour tout k, $u_k + v_k = 1$. De plus, $\pi_{k+1} = 1$ si $\pi_k = 1$ et $X_k = 1$ ou si $\pi_k = -1$ et $X_{k+1} = -1$, d'où, par la formule des probabilités totales, $u_{k+1} = pu_k + (1-p)v_k$ (on a indépendance de X_{k+1} et π_k). De plus,

$$v_{k+1} = 1 - u_{k+1} = u_k + v_k - u_{k+1} = u_k + v_k - pu_k - (1-p)v_k = (1-p)u_k + pv_k.$$

(ii) Déterminer, grâce à $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$, une expression explicite de u_k et v_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

$u_k + v_k = 1$. Ensuite, $u_{k+1} - v_{k+1} = (2p-1)(u_k - v_k)$, donc $u_k - v_k = (2p-1)^k$. D'où

$$u_k = \frac{1 + (2p-1)^k}{2} \text{ et } v_k = \frac{1 - (2p-1)^k}{2}.$$

(iii) Donner un équivalent de ce résultat quand k tend vers $+\infty$: interprétation ?

Quand k tend vers $+\infty$, u_k et v_k tendent vers $\frac{1}{2}$, on a « moyenné » les lancers.

---

2. **(i)** Montrer que si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires $\pi_1, \ldots, \pi_n$ sont deux à deux indépendantes.

Si $p = \frac{1}{2}$, $u_k = \frac{1}{2} = v_k$, et on remarque que si $k \neq \ell$, $\mathbb{P}_{\pi_k=1}(\pi_\ell = 1) = \mathbb{P}(\pi_{\ell-k} = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\pi_\ell = 1)$, etc. D'où l'indpépendance deux à deux des $\pi_1, \dots, \pi_n$.

(ii) Montrer que, réciproquement, si $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont deux à deux indépendantes, alors $p = \frac{1}{2}$.

Si les $\pi_1, \dots, \pi_n$ sont indépendants, alors pour tout $\ell \geqslant k$,

$$\mathbb{P}_{\pi_k=1}(\pi_\ell = 1) = \mathbb{P}(\pi_\ell = 1),$$

i.e.

$$\mathbb{P}(\pi_{\ell-k} = 1) = \mathbb{P}(\pi_\ell = 1).$$

i.e. pour tout $k \leqslant \ell$, $\frac{1+(2p-1)^{\ell-k}}{2} = \frac{1+(2p-1)^{\ell}}{2}$, i.e. pour tous j, k, $(2p-1)^j = (2p-1)^\ell$. i.e. $2p-1 = 0$ ou 1, i.e. $p = 1$ ou $p = \frac{1}{2}$. La même égalité en rajoutant un -1 indique $2p-1 = 0$ ou $2p-1 = -1$ donc $p = 0$ ou $p = \frac{1}{2}$ donc $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 18. ●◐○

1. Montrer que le produit de deux variables de Bernoulli est une variable de Bernoulli.

On rappelle cette propriété de quasi-cours : garder en tête qu'une variable aléatoire qui ne peut prendre que 0 ou 1 comme valeurs est une Bernoulli ! Soit X et Y de Bernoulli de paramètres respectifs p et q. Alors

$$\mathbb{P}(XY = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1) = pq \text{ (par indépendance).}$$

Donc XY suit une loi de Bernoulli de paramètre pq.

---

2. Montrer que deux variables de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si elles ne sont pas corrélées.

On a vu dans le cours que si deux variables aléatoires étaient indépendantes, alors elles étaient décorrélées. Montrons la réciproque. Supposons que X et Y sont décorrélées. Alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) = pq$. De plus, XY est à valeurs dans $\{0, 1\}$ donc nécessiarement XY suit une loi de Bernoulli, de paramètre son espérance, donc de paramètre pq. Donc $\mathbb{P}(XY = 1) = pq = \mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1)$, donc $\{X = 1\}$ et $\{Y = 1\}$ sont indépendants, de même pour $\{X = 0\}$ et $\{Y = 0\}$. Donc X et Y sont indépendantes.

Exercice 19. ●●◐ On choisit une permutation uniformément dans S_n. On appelle L la variable aléatoire correspondant à la longueur du cycle dans lequel 1 se situe. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Déterminons la probabilité que L soit égal à k. On va refaire du dénombrement (youpi).
Choisit un cycle de longueur k contenant 1, c'est choisir $k-1$ éléments parmi $n-1$, choisir une manière d'ordonner ces $k-1$ éléments en cycles : il y en a le nombre d'arrangements, divisé par k (k manières de présenter un cycle), i.e. $\dfrac{k!}{k} = (k-1)!$. Ensuite, c'est laisser complètement libre le choix de la permutation sur les éléments hors du cycle, d'où $(n-k)!$ possibilités. Au final on obtient une probabilité de

$$\frac{\binom{n-1}{k-1} \times (k-1)! \times (n-k)!}{n!} = \frac{\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!)} \times (k-1)! \times (n-k)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Le résultat est donc démontré !

Exercice 20 (Urne de Polya)**.** ●●○ Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge. À chaque fois qu'on tire une boule, on remet dans l'urne la boule tirée, ainsi qu'un boule de même couleur. Quelle est la loi du nombre de boules blanches au k-ième tirage ? Quelle est la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche ?

Déjà au k-ième tirage, il y a $k+1$ boules dans l'urne. Nommons N_k le nombre de boules blanches au k-ième tirage et X_k la variable aléatoire valant 1 si la k-ième boule tirée est blanche, 0 sinon. Montrons par récurrence que N_k suit la loi uniforme sur $[\![1,k]\!]$. L'initialisation est pour vous. Pour l'hérédité,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_{k+1}=j) &= \mathbb{P}(N_k=j, X_k=0)+\mathbb{P}(N_k=j-1, X_k=1) \\
&= \mathbb{P}_{N_k=j}\,\mathbb{P}(X_k=0)\,\mathbb{P}(N_k=j)+\mathbb{P}_{N_k=j-1}(X_k=1)\,\mathbb{P}(N_k=j-1) \\
&= \frac{k+1-j}{k+1}\frac{1}{k}+\frac{j-1}{k+1}\frac{1}{k} \\
&= \frac{k}{(k+1)k} \\
&= \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Donc N_k suit la loi uniforme sur $[\![1,k]\!]$.

On en déduit que

$$\mathbb{P}(X_k=1)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}_{N_k=j}(X_k=1)\,\mathbb{P}(N_k=j)=\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}.$$

C'est fou ! La probabilité d'avoir une boule blanche au n-ième tirage est toujours de $\frac{1}{2}$!

Exercice 21 (Loi de succession de Laplace). ●●○ Considérons $m+1$ urnes $U_0,\ldots,U_m$ et supposons que, pour tout k, U_k contient k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons une des urnes et effectuons-y n tirages avec remise. Quelle est la probabilité, sachant que les n tirages ont donné des boules bleues, qu'il en soit de même du $(n+1)$-ième ?

Exercice 22 (Une matrice à coefficients entiers tirée « au hasard » est inversible). ●●◐ Soient A, B, C et D 4 variables aléatoires suivant toutes la loi uniforme sur $[\![-n,n]\!]$. On note $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Démontrer que la probabilité que M soit inversible tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

2.4 Exercices plus folkloriques

Exercice 23. ●●○ Soit n un entier naturel. On suppose que la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{m_k}$. On tire au hasard, uniformément, un entier x dans $[\![1, n]\!]$.

1. Soit $k \in [\![1, r]\!]$. Quelle est la probabilité que p_k divise x ?

Il y a $\left\lfloor \frac{n}{p_k} \right\rfloor = \frac{n}{p_k}$ multiples de p_k dans $[\![1, n]\!]$. D'où une probabilité de $\frac{1}{p_k}$ que p_k divise x.

2. Montrer que les événements « p_k divise x » sont mutuellement indépendants.

Soient $k_1, \dots, k_\ell$ ℓ indices entre 1 et r, deux à deux distincts. Nommons D_k l'événement « p_k divise x ». Alors $\bigcap_{i=1}^{\ell} D_{k_i}$ est l'événement « $\forall i \in [\![1, \ell]\!], p_{k_i}$ divise x », i.e., par le théorème de Gauss, « $\prod_{i=1}^{\ell} p_{k_i}$ divise x » . Il y a $\frac{n}{\prod_{i=1}^{\ell} p_{k_i}}$ multiples de $\prod_{i=1}^{\ell} p_{k_i}$ dans $[\![1, n]\!]$. Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\ell} D_{k_i}\right) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{\ell} p_{k_i}} = \prod_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(D_{k_i}),$$

d'où le résultat.

3. Montrer que la probabilité que n soit premier avec x est égale à $\prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

L'événement « x est premier avec n » est l'événement $\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant r} \{p_k \text{ ne divise pas } x\} = \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant r} \overline{\{p_k | x\}}$. Ces événements étant indépendants, la probabilité de l'événement est donc $\prod_{1 \leqslant k \leqslant r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

4. On rappelle que l'indicatrice d'Euler $\varphi(n)$ représente le nombre d'entiers inférieurs à n premiers avec n. Exprimer $\varphi(n)$ en fonction de $p_1, \dots, p_r$.

On en déduit que $\varphi(n)$ égale la probabilité trouvée précédemment multipliée par le cardinal de $[\![1, n]\!]$, i.e. $n \prod_{1 \leqslant k \leqslant r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$.

Exercice 24. ●●○ Vous devez tirer au sort équitablement entre deux joueurs mais ne disposez pour ce faire que d'une pièce biaisée (dont vous ignorez en plus le biais exact). Comment faire ?

Il suffit de faire plusieurs séries de deux lancers, et de s'arrêter quand une série ne sort pas deux lancers identiques. L'événement « une série donne PF » et « une série donne FP » sont équiprobables !

Exercice 25. ●●● Un train contient n places numérotées et n voyageurs possèdent un billet. Le premier voyageur monte dans le train mais il a oublié son billet et se place donc au hasard. Puis chaque personne s'installe à sa place si elle est libre et choisit une place libre au hasard sinon. Quelle est la probabilité que la dernière personne se trouve à sa place ?

Bon, là c'est typiquement un exercice où il faut bien faire attention à l'univers que l'on considère. On numérote les voyageurs et les places de 1 à n. On remarque qu'une manière simple de modéliser l'univers est de le considérer formé de cycles contenant 1 et strictement croissants. On a alors une bijection évidente entre tout cycle ne contenant pas n et tout cycle contenant n. Mieux : les deux cycles sont équiprobables (car si on prend une liste $1 < i_2 < \cdots < i_k$, le k-ième voyageur a autant de chances de prendre le siège 1 que le siège n). Donc la probabilité est de $\frac{1}{2}$!
Autre preuve, assez amusante. On numérote toujours les places de 1 à n. Supposons que le voyageur 1 prenne la place k. Quand le voyageur k arrive, au lieu que ce soit à lui de bouger, il demande gentiment au voyageur 1 de se déplacer. Ainsi on est ramenés au problème avec $n-k+1$ voyageurs ! On poursuit jusqu'au voyageur $n-1$, et on est ramenés au problème avec deux voyageurs, dans lequel la probabilité est clairement $\frac{1}{2}$.

Exercice 26 (Nombre de dérangements – ce n'est pas un exercice de probabilités, mais de dénombrement, avec una application en probabilités à la fin). ●●● Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle dérangement de E toute permutation de E sans point fixe. On note d_p le nombre de dérangements d'un ensemble à p éléments.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

Soit $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations ayant $n-k$ points fixes. Choisir une permutation avec k points fixes, c'est choisir d'abord $n-k$ points fixes, i.e. $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$ possibilités, puis choisir une permutation sans point fixe sur les points restants, i.e. d_k possibilités. Donc $|S_{n,k}| = \binom{n}{k} d_k$, donc, comme S_n est la réunion disjointe de tous les $S_{n,k}$, on a $|S_n| = \sum_{k=0}^{n} |S_{n,k}|$, donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k.$$

---

2. Démontrer la formule d'inversion de Pascal : soit f une fonction définie sur $\mathbb{N}$, soit g définie pour tout n par $g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)$. Montrer que pour tout entier naturel n, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$.

Calculons $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} g(k) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(j) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} f(j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{j} f(j).
\end{aligned}$$

Or,

$$\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{j!(k-j)!} = \frac{n!}{(n-k)!j!(k-j)!} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}g(k) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}f(j) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{k-j} \\
&=_{\ell=k-j} \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\sum_{\ell=0}^{n-j}(-1)^{n-k}\binom{n-j}{\ell} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)(1-1)^{n-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}f(j)\delta_{nj} \\
&= \binom{n}{n}f(n) = f(n),
\end{aligned}$$

d'où le résultat demandé.

---

3. En déduire une formule pour d_n.

On en déduit, par la formule d'inversion, que

$$d_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!} =_{\ell=n-k} n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}.$$

---

4. Quelle est la limite de la proportion $\dfrac{d_n}{n!}$ des dérangements de E parmi les permutations de E quand n tend vers $+\infty$?

La proportion de dérangements est alors $\dfrac{d_n}{n!}$, i.e. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}$, elle converge donc vers $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

5. N'ayant pas envie de corriger le prochain DS, M Laillet décide que chaque élève devra corriger une copie qu'il aura tirée au sort. On met alors les noms de tous les élèves dans un chapeau (virtuel) et chacun tire au sort un nom. Donner une valeur approchée de la probabilité qu'un élève tire son nom.

Le tirage correspond au tirage aléatoire d'une permutation. Si un élève tire son nom c'est que la permutation admet un point fixe. Or la proportion de permutation sans points fixes tend, quand n tend vers $+\infty$, vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc la probabilité d'avoir une permutation sans point fixe est approximativement $1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3 Moments d'une variable aléatoire

3.1 Calculs d'espérance et de variance

Exercice 27. ●◐○ Soit X une variable de loi $\mathscr{B}(n, p)$. Calculer $\mathbb{E}(2^X)$ et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

On utilise le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2^X) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k \, \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k (1-p)^{n-k} \\
&= (2p + 1 - p)^n = (1+p)^n.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\,\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1} p^k(1-p)^{n-k} \\
&\underset{\ell=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} p^{\ell-1}(1-p)^{n-\ell+1} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n+1-\ell} \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left(\sum_{\ell=0}^{n+1}\binom{n+1}{\ell} p^{\ell}(1-p)^{n+1-\ell} - (1-p)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{p(n+1)}\left(1-(1-p)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 28. ●○○ Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ espace probabilisé fini et X variable aléatoire réelle discrète vérifiant $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathbb{E}\left(X^4\right) = 1$.

1. Démontrer que $|\mathbb{E}(X)| \leqslant 1$.

On sait, comme $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$, que $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2) = 1$, d'où le résultat.

2. Calculer $\mathbb{V}(X^2)$ et en déduire la loi de X (elle pourra dépendre d'un paramètre qu'on ne cherchera pas à déterminer !).

On sait que $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^4) - \mathbb{E}(X^2)^2 = 0$, donc X^2 est presque sûrement constante. Comme $\mathbb{E}(X^2) = 1$, $X^2 = 1$ presque sûrement. Donc on dispose de $p \in [0,1]$ tel que $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=-1) = 1-p$.

Exercice 29. ●●●

1. Montrer que dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = 1 + X + X^2 + \cdots + X^{10} = \dfrac{X^{11}-1}{X-1}$ ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes réels de degré 5.

On reamrque que $P(X)(X-1) = X^{11} - 1$, donc les racines de P sont les racines 11-èmes de l'unité différentes de 1. En particulier P n'a aucune racine réelle. Mais si P est produit de deux polynômes de degré 5, chacun de ces polynômes est impair donc (TVI) s'annule sur $\mathbb{R}$, absurde !

2. On considère deux dés pipés (lois pas forcément uniformes, éventuellement distinctes pour les deux dés, mais avec des faces numérotées de 1 à 6), on note X, Y les v.a. exprimant le jet de l'un et l'autre dé. On veut montrer qu'il est impossible que $Z = X + Y$ ait une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$. On raisonne par l'absurde que Z suit une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

(a) Que vaut $\mathbb{E}(t^Z)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$?

Comme Z suit une loi uniforme, on en déduit, par le théorème de transfert, que

$$\mathbb{E}(t^Z) = \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{10} t^k = \frac{t^2}{10} \sum_{k=0}^{10} t^k = \frac{t^2}{10} P(t).$$

(b) En utilisant l'indépendance de X et Y, aboutir à une contradiction.

On sait de même que $\mathbb{E}(t^Z) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\,\mathbb{E}(t^Y)$. Mais

$$\mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=1}^{6} a_k t^k,$$

où $a_k = \mathbb{P}(X = k)$. Donc $\mathbb{E}(t^X) = tA(t)$ où A est un polynôme de degré 5. De même, $\mathbb{E}(t^Y) = tB(t)$ où B est un polynôme de degré 5. On a donc, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $t^2 P(t) = tA(t)tB(t)$, donc (égalité sur les polynômes) $P = AB$, i.e. P est factorisable comme un produit de deux polynômes de degré 5, absurde ! D'où une contraction et le résultat désiré.

Exercice 30. Soit n dans $\mathbb{N}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. Déterminer une suite $(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$, indépendante de X, telle que

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} u_k \, \mathbb{P}(X \geqslant k).$$

3.2 Inégalités

Exercice 31. ●○○ Soit X une variable réelle.Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $V(X) \leqslant \mathbb{E}((X-a)^2)$.

On développe le membre de droite :

$$\mathbb{E}((X-a)^2) = \mathbb{E}(X^2) - 2a\,\mathbb{E}(X) + a^2,$$

minimal en $a = \mathbb{E}(X)$, et donc égal à

$$\mathbb{E}(X^2) - 2\,\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = V(X).$$

Exercice 32. ●○○ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Démontrer que $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \geqslant \dfrac{1}{\mathbb{E}(X)}$.

On sait que $\sqrt{X}\dfrac{1}{\sqrt{X}} = 1$. Donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$1 = \mathbb{E}\left(\sqrt{X}.\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leqslant \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right),$$

d'où le résultat !

Exercice 33. ●◐○ Soit n un entier naturel non nul, $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $p \in [0,1]$. On lance n fois une pièce de monnaie bien équilibrée. Déterminer une condition suffisante sur n pour que la probabilité d'avoir une proportion de « pile » dans $\left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right]$ soit supérieure ou égale à p.

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On sait que lorsqu'on lance n fois une pièce de monnaie, la variable aléatoire X_n correspondant au nombre de « pile » suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, donc d'espérance $\frac{n}{2}$ et de variance $\frac{n}{4}$. Or,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} \notin \left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right]\right|\right) = \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| > n\alpha\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|X_n - \frac{n}{2}\right| \geqslant n\alpha\right),$$

donc, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} \notin \left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right]\right|\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\alpha^2} = \frac{1}{4n\alpha^2},$$

donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_n}{n} \in \left[\frac{1}{2} - \alpha, \frac{1}{2} + \alpha\right]\right|\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

Cette probabilité est supérieure ou égale à p lorsque $\frac{1}{4n\alpha^2} \leqslant 1 - p$, i.e.

$$n \geqslant \frac{1}{4\alpha^2(1-p)}.$$

(ce résultat est cohérent avec notre intuition : n tend vers $+\infty$ quand p tend vers 1 ou quand α tend vers 0).

Exercice 34. ●●○ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, avec X de variance strictement positive. Déterminer la droite d'approximation linéaire de Y, i.e. trouver a et b deux réels minimisant la quantité $\mathbb{E}\left((Y-(aX+b))^2\right)$.

On sait que

$$\mathbb{E}\left((Y-(aX+b))^2\right) = V\left(Y-(aX+b)\right) + \mathbb{E}\left((Y-(aX+b))\right)^2.$$

Or, $\mathbb{E}\left((Y-(aX+b))\right)^2$ est toujours positif et minimal quand il est nul, i.e. quand

$$(\mathbb{E}(Y) - a\,\mathbb{E}(X) - b)^2 = 0,$$

i.e. quand $b = \mathbb{E}(Y) - a\,\mathbb{E}(X)$. Ensuite,

$$V\left(Y-(aX+b)\right) = V(Y-aX) = V(Y) - a\,\mathrm{Cov}(X,Y) + a^2V(X),$$

polynôme minimal en $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}$.
La quantité est donc minimale en $a = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}$ et en $b = \mathbb{E}(Y) - \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)\,\mathbb{E}(X)}{V(X)}$.

Exercice 35. ●●● *Approximation uniforme de la valeur absolue.* Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}(x)$ avec $x\in[0,1]$. On note $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$ pour n entier non nul. On considère $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $t\mapsto|t-1/2|$ et on pose

$$\forall x\in[0;1]\quad \mathrm{B}_n(f)(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{\mathrm{S}_n}{n}\right)\right] \qquad \text{et} \qquad \Delta_n(f) = \max_{x\in[0,1]}\|\mathrm{B}_n(f)(x) - f(x)\|_\infty$$

1. Justifier que $\Delta_n(f)$ existe.

2. Si X est variable aléatoire, comparer $\mathbb{E}(\mathrm{X})^2$ et $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}^2\right)$.

3. Vérifier que f est lipschitzienne.

4. Vérifier que $B_n(f)$ est une fonction polynomiale.

5. Montrer

$$\Delta_n(f) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

6. Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 36 (Inégalité de Cantelli). ●●◐ Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance V. Soit $\varepsilon > 0$.

1. (Méthode piétonne)

(i) Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$.

On sait que

$$\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(X - m + x \geqslant \varepsilon + x) = \mathbb{P}((X - m + x)^2 \geqslant (\varepsilon + x)^2),$$

donc, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}((X - m + x)^2)}{(\varepsilon + x)^2} = \frac{\mathbb{E}((X - m)^2) + 2x\,\mathbb{E}(X - m) + x^2}{(\varepsilon + x)^2} = \frac{\mathbb{V}(X) + x^2}{(\varepsilon + x)^2}.$$

(ii) En déduire que $\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V}{V + \varepsilon^2}$ et que $\mathbb{P}(|X - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2V}{V + \varepsilon^2}$.

L'idée est qu'on a une égalité vraie pour tout x. Si on pose la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{V + x^2}{(\varepsilon + x)^2}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \varphi(x).$$

Si on arrive à **minimiser** φ, i.e. si on arrive à trouver x_0 tel que $\varphi(x_0) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}}(\varphi(x))$, on aura une inégalité optimale.

Or, la dérivée de φ est

$$\varphi'(x) = \frac{2x(\varepsilon + x)^2 - 2(V + x^2)(\varepsilon + x)}{(\varepsilon + x)^4},$$

et est nulle quand

$$x(\varepsilon+x)^2-(V+x^2)(\varepsilon+x)=0,$$

i.e. quand $x(\varepsilon+x)=V+x^2$, i.e. quand $x=\frac{V}{\varepsilon}$. On peut étudier le signe de cette dérivée et remarquer qu'alors $\frac{V}{\varepsilon}$ est un point en lequel φ atteint son minimum.
On a alors $\varphi\left(\frac{V}{\varepsilon}\right)=\frac{V}{V+\varepsilon^2}$.
Remarque : on aurait pu, si on y avait pensé comme ça, **poser** $x=\frac{V}{\varepsilon}$, et, comme l'inégalité est vraie pour tout x, dire que $\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\varphi(V/\varepsilon)$.

Enfin,

$$\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)=\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)+\mathbb{P}(X-m\leqslant-\varepsilon)=\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)+\mathbb{P}(-X+m\geqslant\varepsilon)$$

Mais en appliquant le même raisonnement que précédemment à $-X$, qui est d'espérance $-m$ et de variance V, on obtient $\mathbb{P}(-X+m\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V}{V+\varepsilon^2}$, d'où

$$\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{2V}{V+\varepsilon^2}.$$

(iii) Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef.

Première inégalité.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff ne permet que des estimations en valeur absolue :

$$\mathbb{P}(X-m\geqslant\varepsilon)\leqslant\mathbb{P}(|X-m|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{V}{\varepsilon^2}.$$

Or, $\frac{V}{V+\varepsilon^2}\leqslant\frac{V}{\varepsilon^2}$. L'inégalité de Cantelli est alors meilleure dans tous les cas.

Deuxième inégalité.

On remarque que $\dfrac{2V}{V+\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{V}{\varepsilon^2}$ si et seulement si $\varepsilon^2 \leqslant V$. L'inégalité de Cantelli est donc meilleure que celle de Tchebycheff lorsque $\varepsilon^2 \leqslant V$.

2. (Avec Cauchy-Schwarz) Retrouver le résultat précédent en remarquant que $\mathbb{E}(\varepsilon + m - X) \leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon})$, et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{X<m+\varepsilon}$.

On remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varepsilon + m - X)^2 &\leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)\mathbb{1}_{\varepsilon+m-X>0})^2 \\
&\leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2)\,\mathbb{E}(\mathbb{1}^2_{X<m+\varepsilon}) \text{ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \\
&\leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2)\,\mathbb{P}(X < m+\varepsilon) \text{ car } \mathbb{1}^2_{X<m+\varepsilon} = \mathbb{1}_{X<m+\varepsilon} \text{ et par définition} \\
&\leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2)(1 - \mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon)).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathbb{E}(\varepsilon + m - X)^2 \leqslant \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2) - \mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2)\,\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon)$, donc que

$$\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2) - \mathbb{E}(\varepsilon + m - X)^2}{\mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2)}.$$

Or, par définition, $\mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2) - \mathbb{E}(\varepsilon + m - X)^2 = V(\varepsilon + m - X) = (-1)^2 V(X) = V$. De plus,

$$\mathbb{E}((\varepsilon + m - X)^2) = \mathbb{E}(\varepsilon^2) + 2\,\mathbb{E}(\varepsilon(m - X)) + \mathbb{E}((m - X))^2 = \varepsilon^2 + 0 + V,$$

d'où

$$\mathbb{P}(X - m \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V}{V+\varepsilon^2}.$$

D'où l'inégalité désirée.

DEBUT ↖