

FIN ↘

TD21

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1 (Endomorphismes cycliques). ●●○ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E .

(Argument important) On sait que $f^{n-1} \neq 0$. Alors on dispose de x_0 dans E tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. On montre alors que $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E . Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0) = 0$$

On remarque qu'en appliquant f^{n-1} , on annule tout sauf le premier terme :

$$\lambda_0 f^{n-1}(x_0) + \lambda_1 f^n(x_0) + \dots + \lambda_{n-1} f^{2n-1}(x_0) = 0, \text{ i.e. } \lambda_0 f^{n-1}(x_0) = 0,$$

donc $\lambda_0 = 0$. On voit qu'alors pour conclure il faudrait faire une récurrence.

On peut faire sans : supposons que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \neq (0, \dots, 0)$. Alors l'ensemble $\{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_k \neq 0\}$ n'est pas vide et possède un plus petit élément k_0 . La relation de liaison s'écrit alors

$$\sum_{i=k_0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0$$

Composons alors la relation de liaison par u^{p-1-k_0} . Alors

$$f^{n-1-k_0} \circ \sum_{i=k_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x_0) = 0,$$

i.e. $\sum_{i=k_0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-k_0+i}(x_0) = 0$, donc $\lambda_{k_0} u^{n-1}(x_0) = 0$, donc $\lambda_{k_0} = 0$, absurde.

Donc la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre.

2. Déterminer les matrices de $f, f^2, \dots, f^{n-1}$ dans cette base.

Si $e_i = f^{i-1}(x_0)$, on remarque que pour tout i dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_i) = e_{i+1}$ et $f(e_n) = 0$. Donc la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Celle de f^2 est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

etc., jusqu'à celle de f^{n-1} qui est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Démontrer que $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$

Déjà, si $g \in \text{Vect}(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$, alors on dispose de $(a_0, \dots, a_{n-1})$ tels que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

Alors

$$f \circ g = f \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f \circ f^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+1} = g \circ f,$$

d'où l'inclusion réciproque.

Ensuite, si $g \circ f = f \circ g$, déterminons la forme de la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$. Déjà, $g(x_0) \in E$, donc on dispose de $a_1, \dots, a_n$ tels que $g(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$.

Soit i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$g(e_j) = g(f^{j-1}(x_0)) \underset{\text{(commutation)}}{=} f^{j-1}(g(x_0)) = f^{j-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n-j+1} a_k e_{k+j} = \sum_{k=1}^{n-j+1} a_k e_{k+j},$$

donc la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_n & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{i-1}),$$

donc $g = \sum_{i=1}^n a_i f^{i-1}$, d'où l'inclusion directe !

Exercice 2 (Sur l'opérateur de différence). On considère l'opérateur de différence

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}.$$

1. Représenter la matrice de Δ dans la base canonique au départ et à l'arrivée, et en déduire que Δ est nilpotent.
2. Déterminer, par un raisonnement matriciel, l'image et le noyau de Δ .

On va démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $u^2 = \Delta$. On suppose qu'un tel u existe.

3. Démontrer que u stabilise $\mathbb{C}_1[X]$.
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Conclure.

Exercice 3. ●●○ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

A et B sont toutes les deux des matrices de symétrie, donc on dispose de r et de s tels que A est semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ et B est semblable à $\begin{pmatrix} I_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{n-s,s} & -I_{n-s} \end{pmatrix}$. Donc

- si A et B sont semblables, alors elles ont même trace.
 - si $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$, alors $r - (n-r) = s - (n-s)$, i.e. $2r - n = 2s - n$, donc $r = s$, donc A et B sont semblables.
-

Exercice 4 (Couple de symétries qui anticommulent). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \text{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E t.q. $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. ●●○

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = XY^T$.

Deux manières d'aborder la question :

- M est de rang 1 donc elle est équivalente à $J_{n,n,1}$, donc on dispose de P et Q inversibles telles que $M = PJ_{n,n,1}Q$. Or, $J_{n,n,1} = J_{n,1,1} \times J_{1,n,1}$, avec, on le rappelle, $J_{n,1,1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $J_{1,n,1} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. Donc $M = PJ_{n,1,1} \times J_{1,n,1}Q$ avec $X = PJ_{n,1,1} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y = \text{tr}(J_{1,n,1}Q) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Donc $M = X \text{tr} Y$.
- Plus concrètement, M est de rang 1 donc M possède une colonne non nulle X . Maintenant, toutes les colonnes de M sont proportionnelles à X . Posons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M . Alors pour tout i on dispose de $y_i \in \mathbb{K}$ tel que $C_i = y_i X$. Donc

$$M = (y_1 X \ y_2 X \ \cdots \ y_n X) = X(y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) = X \text{tr} Y,$$

où $Y = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n)$.

2. Prouver que toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1, et donc qu'il existe $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ $2r$ matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = \sum_{i=1}^r X_i Y_i^T$.

On utilise l'équivalence à $J_{n,n,r}$: on dispose de P et Q inversibles telles que $M = PJ_{n,n,r}Q$, donc

$$M = \sum_{i=1}^r J E_{ii} Q,$$

où E_{ii} est la matrice élémentaire à la position (i, i) . Donc M est bien somme de r matrices de rang 1.

3. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de df et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \text{tr}(f)f$.
4. À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 6 (Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). ●●○

1. Déterminer la trace de l'application de transposition sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Il suffit de déterminer la matrice de $\varphi : M \mapsto \text{tr } M$ dans une base de notre choix de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Deux possibilités.

- Dans la base canonique, on remarque que $\varphi(E_{ii}) = E_{ii}$ et que $\varphi(E_{ij}) = E_{ji}$ si $i \neq j$, donc les seuls termes diagonaux de la matrice considérée seront ceux des colonnes des E_{ii} , d'où une trace égale à n .
- La transposition est une symétrie, donc dans une base adaptée aux deux espaces caractéristiques de la symétrie, $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$, on obtient une matrice avec $\dim(\mathcal{S}_n) \ll 1 \gg$ et $\dim(\mathcal{A}_n) \ll -1 \gg$, d'où une trace de $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = MA$. Déterminer $\text{tr}(\varphi)$.

On écrit la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans

$$(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots)$$

Dans cette base, la matrice de φ est, par blocs,

$$\begin{pmatrix} A & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0_n & \cdots & 0_n & A \end{pmatrix}, \text{ de trace } n\text{tr}(A).$$

Stratégie/exercices conseillés. En sus des exercices faits en cours, il faut à mon avis :

- parler de base adaptée (11 ou 14),
- faire un exercice avec une application linéaire sur les polynômes (8),
- faire un exercice un peu fin de changement de base (16),
- étudier au moins une fois un commutateur $(AB - BA)$: exercice 21.

Si vous avez du mal, concentrez-vous sur les exercices 13 et 7.

2 Matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 7. ●●○ Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

Calculons les images des éléments de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ par f :

- $f(1) = 1 + 1 - 2 = 0$.
- $f(X) = X + 1 + X - 1 - 2X = 0$.
- $f(X^2) = (X+1)^2 + (X-1)^2 - 2X^2 = X^2 + 2X + 1 + X^2 - 2X + 1 - 2X^2 = 2$.
- $f(X^3) = (X+1)^3 + (X-1)^3 - 2X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 + X^3 - 3X^2 + 3X - 1 - 2X^3 = 6X$.

Donc la matrice de f dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est déjà échelonnée : on lit directement que $\ker(f) = \text{Vect}(1, X)$ et que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(2, 6X) = \text{Vect}(1, X)$.

Exercice 8. ●○○ Soit $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

. Déjà, f_α est linéaire. Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, λ et μ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha(\lambda P + \mu Q) &= (1+X)(\lambda P + \mu Q)' - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)(\lambda P' + \mu Q') - \alpha(\lambda P + \mu Q) \\ &= (1+X)\lambda P' + (1+X)\mu Q' - \alpha\lambda P - \alpha\mu Q \\ &= \lambda((1+X)P' - \alpha P) + \mu((1+X)Q' - \alpha Q) \\ &= \lambda f_\alpha(P) + \mu f_\alpha(Q), \end{aligned}$$

d'où la linéarité.

. Ensuite, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg((1+X)P') \leq 1 + n - 1 = n$, donc $\deg((1+X)P' - \alpha P) \leq n$.

Donc f_α est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que $\mathcal{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille $(1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ est une famille de $n+1$ polynômes non nuls à degrés échelonnés, donc est libre. De cardinal $n+1$ dans un espace de dimension $n+1$, elle est donc une base de cet espace.

3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.

Soit k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

$$f_\alpha((1+X)^k) = (1+X)k(1+X)^{k-1} - \alpha(1+X)^k = (k-\alpha)(1+X)^k,$$

d'où $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_\alpha)$ est la matrice diagonale de diagonale $(-\alpha, 1-\alpha, 2-\alpha, \dots, n-\alpha)$.

4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

f_α est inversible si et seulement si A_α est inversible. Une matrice diagonale étant inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls, A_α est inversible si et seulement si $\alpha \notin \llbracket 0, n \rrbracket$.

Exercice 9. ●●○ Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{-x}, f_2(x) = xe^{-x}.$$

1. Quelle est la dimension de E ?

On montre que E est de dimension 2, en vérifiant que (f_1, f_2) est libre : soient λ et μ tels que $\lambda f_1 + \mu f_2 = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda = 0$. En évaluant ensuite en 1, on obtient $\mu e^{-1} = 0$ donc $\mu = 0$. Donc (f_1, f_2) est libre, de cardinal 2, donc elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension 2.

2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E .

On dérive f_1 et f_2 et on montre que leurs dérivées sont toujours dans E . Pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$f_1'(x) = -e^{-x} = -f_1(x)$$

$$f_2'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = f_1 - f_2.$$

Donc $\varphi(f_1) \in E$ et $\varphi(f_2) \in E$ donc φ est à valeurs dans E . Ensuite, par linéarité de la dérivation, φ est linéaire.

3. Écrire la matrice représentative A de φ dans la base $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ de E .

On a déjà calculé les images de vecteurs de $\mathcal{B}$ par φ , donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n .

On remarque que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et, par récurrence immédiate, $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $f : x \mapsto (3x + 1)e^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout entier naturel n .

On utilise la représentation matricielle ! $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{(n)}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi^n(f)) = A^n \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 - 3n \\ 3 \end{pmatrix},$$

donc $f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n (1 - 3n + 3x)e^{-x}$.

6. Montrer que tout élément f de E admet une unique primitive F élément de E et que $\psi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E .

Soit f dans E , $f = ae^{-x} + bxe^{-x}$. Alors

$$\int_0^x f(t)dt = a \int_0^x e^{-t}dt + b \int_0^x te^{-t}dt$$

Par intégration par parties ($u(t) = t$, $u'(t) = 1$, $v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$,

$$\int_0^x te^{-t} dt = -xe^{-x} - \int_0^x -e^{-t} dt = -xe^{-x} - e^{-x} + 1,$$

donc

$$\int_0^x f(t) dt = -ae^{-x} - bxe^{-x} - be^{-x} + b = (-a - b)e^{-x} - bxe^{-x} + b,$$

donc les primitives de f sont de la forme $x \mapsto (-a - b)e^{-x} - bxe^{-x} + K$ avec K constante. La seule appartenant à $\text{Vect}(f_1, f_2)$ est celle avec $K = 0$, i.e. $x \mapsto (-a - b)e^{-x} - bxe^{-x}$. Cette application est bien un endomorphisme car on vient de démontrer que pour tous a et b ,

$$\psi(af_1 + bf_2) = (-a - b)f_1 - bf_2.$$

7. (i) Déterminer la matrice B de ψ dans la base $\mathcal{B}$.

On a déjà fait les calculs ! $\psi(f_1) = -f_1$ et $\psi(f_2) = -f_1 - f_2$. Donc la matrice de ψ dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Quel lien y a-t-il entre A et B ?

On calcule : $AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 10. ●○○ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose $f^2 \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Alors $f(x) \neq 0$ et la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre. En effet, soient λ, μ, ν trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x) = 0.$$

Composons l'égalité précédente par f^2 . On a alors $f^2(\lambda x + \mu f(x) + \nu f^2(x)) = 0$, soit

$$\lambda f^2(x) + \mu f^3(x) + \nu f^4(x) = 0.$$

Or, $f^3(x) = 0$, $f^4(x) = f^3(f(x)) = 0$, donc $\lambda f^2(x) = 0$, donc, comme $f^2(x) \neq 0$, $\lambda = 0$. Donc $\mu f(x) + \nu f^2(x) = 0$. En composant par f , on obtient $\mu f^2(x) + \nu f^3(x) = 0$, donc $\mu f^2(x) = 0$, donc $\mu = 0$. Donc $\nu f^2(x) = 0$, donc $\nu = 0$. Donc la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est libre, donc c'est une base

de $\mathbb{R}^3$. Dans cette base, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. ●●○ Soit u un endomorphisme de E $\mathbb{K}$ -evdf. Représenter $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ dans une base $\mathcal{E}$ qui fasse apparaître le plus de zéros possible, lorsque...

1. $u^2 = 0$.

Si $u^2 = 0$, alors $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$. Soit $n = \dim(E)$ et $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(u)$. On la

complète en une base de E . Alors, dans cette base, la matrice A de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r,r+1} & \cdots & a_{r,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Les premières colonnes de 0 sont dues au fait que pour tout i , $u(e_i) = 0$, les dernières lignes sont dues au fait que $\text{Im}(u) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. De plus, par le théorème du rang, $n = r + \dim(\ker(u)) \geq r + r$ donc $r \leq \frac{n}{2}$.

Mais, si l'on considère S un supplémentaire de $\ker(u)$, $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S , $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\text{Im}(u)$. On la complète en une base de $\ker(u)$, puis de E . La matrice obtenue, beaucoup plus simple, est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & (0) \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & (0) & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. $\text{Im}(u) = \ker(u)$.

Si $\text{Im}(u) = \ker(u)$, alors on est dans la situation précédente avec $2r = n$, i.e. n pair et $r = \frac{n}{2}$.

3. $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

ATTENTION ! On n'a pas nécessairement un projecteur ! Toujours penser qu'une homothétie satisfait $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$, mais n'est un projecteur que si elle est nulle ou l'identité.

En revanche, si l'on prend $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(u)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est adaptée à la décomposition $\text{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$. Dans cette base, la matrice A de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,r} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \cdots & a_{r,r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4. $\ker(u)$ est un hyperplan de E .

Si $\ker(u)$ est un hyperplan de E , alors $\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = 1$, donc u est de rang 1. Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de $\ker(u)$. Soit $e_n \notin \ker(u)$. Alors (propriété du cours sur les hyperplans) $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Or, $u(e_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $u(e_n) \in E$ donc on dispose de $a_1, \dots, a_n$ des scalaires tels que $u(e_n) = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$. Donc, dans cette base, la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Exercice 12. ●●○

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n})$ tel que $u^2 = 0$ et $\text{rg}(u) = n$. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{3n})$ tel que $u^3 = 0$ et $\text{rg}(u) = 2n$. Montrer que $\text{Ker } u = \text{Im } u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

3 Matrices de passage – matrices semblables et équivalentes

Exercice 13. ●○○ Dans cet exercice on notera $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Donner une base du noyau de f .

On résout

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right. &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right. \\
 &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = 0 \\ -2z = 0 \\ z = 0 \end{array} \right. \\
 &\xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ z = 0 \\ y = \alpha, \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Donc $\ker(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$

3. Donner une équation de l'image de f .

Cette fois on résout un système linéaire inhomogène. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors $(a, b, c) \in$

$\text{Im}(f)$ ssi il existe (x, y, z) tel que $f(x, y, z) = (a, b, c)$. On résout donc :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y + 2z = a \\ -x + y - 2z = b \\ -2x + 2y - 3z = c \end{array} \right. \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = b \\ 2x - 2y + 2z = a \\ -2x + 2y - 3z = c \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = b \\ -2z = a + 2b \\ z = c - 2b \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = b \\ z = c - 2b \\ -2z = a + 2b \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_3 + 2L_2} \left\{ \begin{array}{l} -x + y - 2z = b \\ z = c - 2b \\ 0 = a - 2b + 2c, \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

d'où une unique condition de compatibilité : $a - 2b + 2c = 0$, donc

$$\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, a - 2b + 2c = 0\}.$$

4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.

(i) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On montre que la matrice des vecteurs (u_1, u_2, u_3) est inversible (comme ça on aura

répondu à la dernière question) :

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$?

Il s'agit de la matrice que l'on vient d'inverser :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (i) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1 , u_2 , u_3 .

On calcule :

$$f(u_1) = f(1, 1, 0) = 0$$

$$f(u_2) = f(0, 1, 1) = (0, -1, -1) = -u_2$$

$$f(u_3) = f(-2, 0, 1) = (-2, 0, 1) = u_3.$$

(ii) Quelle est la matrice $C = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ de f dans la base B' ?

On en déduit que $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

6. Calculer P^{-1} .

Déjà calculée ! C'est $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Exercice 14. ●○○

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, non inversible. Soit $r = \text{rg}(A)$. Alors $r < n$. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors B est nilpotente et de rang r , donc est équivalente à A .

2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 15. ●●○ Soit E un espace vectoriel de dimension n . On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E . On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E ?

Il suffit d'avoir $M^2 = M$.

2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.

On fait le calcul : $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$, donc $E_{i,i}$ est une matrice de projecteur.

Ensuite, $(E_{i,i} + E_{i,j})^2 = E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,i} + E_{i,j}^2 = E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} = E_{i,i} + E_{i,j}$, car, on le rappelle,

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{jk}E_{i,\ell}.$$

3. Démontrer la propriété annoncée.

Il nous reste à démontrer que la famille des $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ où $A_{ii} = E_{i,i}$ et, si $i \neq j$, $A_{ij} = E_{i,i} + E_{i,j}$, est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme elle contient n^2 éléments, on montre simplement qu'elle est libre.

Soit $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une famille de scalaires tels que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}A_{ij} = 0$. Alors

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}A_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{ij}A_{ij} = 0,$$

donc

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}E_{i,i} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{ij}E_{i,i} + a_{ij}E_{i,j} = 0,$$

donc

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \right) E_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} a_{ij} E_{ij} = 0,$$

donc, par la liberté des (E_{ij}) , $a_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$, donc $\sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii} = 0$ donc pour tout i , $a_{ii} = 0$.
Donc la famille est libre, donc est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formée de matrices de projecteurs.

On en déduit, en prenant une base $\mathcal{E}$ de E et en considérant les applications linéaires α_{ij} telles que $\text{Mat}_{\mathcal{E}}(\alpha_{ij}) = A_{ij}$, une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs.

Exercice 16. ●●●

- (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Si f est une homothétie, on dispose de λ tel que pour tout x de E , $f(x) = \lambda x$, donc $(x, f(x))$ est liée.

Si pour tout x de E , $(x, f(x))$ est liée, pour tout x de E non nul on dispose de λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Soient alors $x \neq y$ deux éléments de E non nuls. On a alors $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$.

- Si x et y sont colinéaires, alors on dispose de μ non nul tel que $y = \mu x$, donc $f(y) = \mu \lambda_x x$, et $f(y) = \lambda_y y = \lambda_y \mu x$. Comme y est non nul, $\mu \lambda_x = \lambda_y \mu$, et comme $\mu \neq 0$, $\lambda_x = \lambda_y$.
- Si x et y ne sont pas colinéaires, la famille (x, y) est libre. Or $f(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y)$ d'une part, et $f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda_x f(x) + \lambda_y f(y)$ d'autre part. Donc

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y,$$

donc, comme la famille (x, y) est libre, $\lambda_{x+y} = \lambda_x$ et $\lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Donc pour tous x, y dans E , $\lambda_x = \lambda_y$. Donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout x de E , $f(x) = \lambda x$, donc f est une homothétie.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.
-

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}$ dont A est la matrice dans la base canonique.

Si f est une homothétie, alors $A = \lambda I_n$, donc, comme $\text{tr}(A) = 0$, $n\lambda = 0$, donc $\lambda = 0$ et A est nulle.

Si f n'est pas une homothétie, alors par la question précédente on dispose de x tel que $(x, f(x))$ est libre. Complétons cette famille en une base de $\mathbb{R}^n$. Alors la matrice de A dans cette base (au départ et à l'arrivée) est

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

où B est une matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, de trace nulle ! Ceci nous encourage à démontrer le résultat par récurrence sur n la taille de la matrice !

Initialisation. Pour $n = 1$ le résultat est trivial puisque la seule matrice qui convienne est la matrice nulle.

Hérédité. Supposons la proposition vraie pour un certain n et soit A de taille $n+1$. Par la question précédente, A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

avec B de trace nulle. Donc B est semblable à une matrice M de trace nulle par hypothèse de

réurrence, i.e. il existe P inversible telle que $M = P^{-1}BP$. Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & P \end{pmatrix}$. Par les

règles de calcul par blocs, Q est inversible d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & P^{-1} \end{pmatrix}$, et

$$Q^{-1} \begin{pmatrix} 0 & (a_i) \\ 1 & \\ (0) & B \\ 0 & \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 0 & (a_i) \\ 0 & \\ (0) & P^{-1}B \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ 0 & \\ (0) & P \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (b_i) \\ 1 & \\ (0) & M \\ 0 & \end{pmatrix},$$

où $(b_2 \cdots b_{n+1}) = (a_2 \cdots a_{n+1}) \times P$. Donc A est semblable à une matrice de trace nulle et le résultat est démontré.

Exercice 17. ●●○ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = 3$, tel que $f^2 = 2f - \text{Id}$, $f \neq \text{Id}$.

1. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1} .

On sait que $f^2 = 2f - \text{Id}$, donc $2f - f^2 = \text{Id}$, donc $(2\text{Id} - f) \circ f = \text{Id}$ donc f est inversible, d'inverse $2\text{Id} - f$.

2. Montrer que $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \ker(f - \text{Id})$.

Soit x dans $\text{Im}(f - \text{Id})$. Alors on dispose de a dans E tel que $x = f(a) - a$. Alors

$$(f - \text{Id})(x) = f(x) - x = f(f(a) - a) - f(a) + a = f^2(a) - 2f(a) + a = 0,$$

par hypothèse.

Donc $\text{Im}(f - \text{Id}) \subset \ker(f - \text{Id})$.

3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On sait, par le théorème du rang, que $\dim(\text{Im}(f - \text{Id})) + \dim(\ker(f - \text{Id})) = 3$.

De plus, $\dim(\text{Im}(f - \text{Id})) \leq \dim(\ker(f - \text{Id}))$ (par la question précédente), donc $\dim(\text{Im}(f - \text{Id})) + \dim(\ker(f - \text{Id})) = 2 \dim(\ker(f - \text{Id}))$.

Donc nécessairement, comme $f \neq \text{Id}$, $\dim(\text{Im}(f - \text{Id})) = 1$ et $\dim(\ker(f - \text{Id})) = 2$. Donc $f - \text{Id}$ est de rang 1. Soit a une base de $\text{Im}(f - \text{Id})$, que l'on complète en une base (a, b) de $\ker(f - \text{Id})$, et

c un antécédent de a par $f - \text{Id}$. Alors dans la base (b, a, c) , la matrice de $f - \text{Id}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

donc la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \text{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n .

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on montre (récurrence) que : $\forall n, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. ●●● Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante égale à 0, non constante égale à 1 telle que pour toutes A et B , $f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Déterminer $f(\text{I}_n)$ et $f(0)$.

Déjà, $f(I_n) = f(I_n^2) = f(I_n)^2$, donc $f(I_n) = 0$ ou 1 . Si $f(I_n) = 0$, alors pour tout A , $f(A) = f(AI_n) = f(A)f(I_n) = 0$, absurde car f n'est pas constante égale à 0 . Donc $f(I_n) = 1$.

Ensuite, de même, $f(0) = f(0^2) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1 . Si $f(0) = 1$, alors pour toute A , $f(A) = f(A) \times 1 = f(A)f(0) = f(A \times 0) = f(0) = 1$, absurde car f n'est pas constante égale à 1 . Donc $f(0) = 0$.

2. Démontrer que si A est inversible, $f(A) \neq 0$.

Si A est inversible, on dispose de B telle que $AB = I_n$. Alors $f(A)f(B) = f(I_n) = 1$ donc $f(A) \neq 0$.

3. Démontrer que si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

Si A n'est pas inversible, alors A est équivalente à une matrice nilpotente N (cf. exo 14), i.e. on dispose de P, Q inversibles telles que $A = PNQ$. Alors $f(A) = f(P)f(N)f(Q)$.

Mais N est nilpotente, donc $N^n = 0$ (on sait que si N est nilpotente, son indice de nilpotence est inférieur à la dimension des matrices), donc $f(N)^n = 0$ donc $f(N) = 0$. Donc $f(A) = 0$.

4 Autres exercices

Exercice 19. ●○○ Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})}$.

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + {}^tX = \text{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (Sur l'application $AB - BA$). ●●● On considère l'application Ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\Psi(A, B) = AB - BA.$$

1. I_n est-elle dans l'image de Ψ ?

NON ! Soit $M \in \text{Im}(\Psi)$. Alors on dispose de A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\text{tr}(M) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(AB) = 0$, et $\text{tr}(I_n) \neq 0$.

2. Soit A tel qu'il existe B vérifiant $\Psi(A, B) = A$. Calculer $\text{tr}(A^p)$ pour tout entier p .

Déjà, $\text{tr}(A) = \text{tr}(AB - BA) = 0$. Ensuite, si p est dans $\mathbb{N}$,

$$\text{tr}(A^p) = \text{tr}(A^{p-1}(AB - BA)) = \text{tr}(A^p B) - \text{tr}(A^{p-1}BA) = \text{tr}(A^p B) - \text{tr}(A^p B) = 0.$$

3. Déterminer l'image de Ψ .

On va montrer que $\text{Im}(\Psi)$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. Déjà, $\text{Im}(\Psi) \subset \ker(\text{tr})$. Pour montrer l'inclusion réciproque, **ON NE PEUT PAS** raisonner avec les dimensions. On montre donc l'inclusion réciproque. Soit M de trace nulle. Alors M est semblable à N de diagonale nulle

(exercice précédente). On va essayer d'écrire $M = AB - BA$ où $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$. Ceci

devient simple : si $\mathcal{D}_n^0(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle, si

$$\Phi_A : \begin{matrix} \mathcal{D}_n^0(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{D}_n^0(\mathbb{K}) \\ B \mapsto AB - BA \end{matrix},$$

$\ker(\Phi_A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA\}$. On a vu, dans le TD sur les matrices, que si A était diagonale avec tous ses coefficients non nuls et deux à deux distincts, alors B était diagonale. Mais si B est de diagonale nulle, alors B est nulle. Donc Φ_A est injective, donc surjective. Donc on dispose de B tel que $AB - BA = N$. Mais $M = PNP^{-1}$, donc $M = PABP^{-1} - PBAP^{-1} = (PAP^{-1})(PBP^{-1}) - (PBP^{-1})(PAP^{-1})$ d'où le résultat !

Exercice 22. ●●●

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer tous les endomorphismes de E tels que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$

2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A vérifiant $AM = MA$ pour toute matrice M .
3. Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E . Identifier f .
5. Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 23 (X MP 2014). ●●● Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\text{tr}(A) = \text{rg}(A)$.

Si A est idempotente, alors c'est la matrice d'un projecteur, dont le rang égale la trace par le cours.

2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ de cardinal p . Soit $A = \sum_{M \in G} M$

(a) Vérifier que $\frac{A}{p}$ est idempotente.

On calcule A^2 . Déjà, soit $N \in G$. Alors

$$AN = \sum_{M \in G} MN = \sum_{M \in G} M = A,$$

car $M \mapsto MN$ est une bijection. Donc

$$A^2 = A \sum_{M \in G} M = \sum_{M \in G} AM = \sum_{M \in G} A = pA,$$

donc

$$\left(\frac{A}{p}\right)^2 = \frac{1}{p^2} A^2 = \frac{1}{p^2} pA = \frac{A}{p},$$

donc $\frac{A}{p}$ est idempotente.

(b) On suppose que $\text{tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.

Si $\text{tr}(A) = 0$, alors $\text{tr}(A/p) = 0$, donc $\text{rg}(A/p) = 0$ donc $\text{rg}(A) = 0$ donc $A = 0$.

(c) Montrer que $\text{tr}(A)$ est un entier divisible par p .

Comme $\frac{1}{p} \text{tr}(A) = \text{rg}(A)$, $\frac{1}{p} \text{tr}(A) \in \mathbb{N}$, donc $\text{tr}(A)$ est un entier divisible par p .

3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall M \in G, Mx = x\}$.

(i) Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension égale à $\text{tr}(A)/p$.

Le fait que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ est trivial. Déterminons sa dimension. On peut espérer que $F = \text{Im} \left(\frac{A}{p} \right) = \ker \left(\frac{A}{p} - I_n \right)$.

Déjà, si $x \in F$, alors $\frac{1}{p} Ax = \frac{1}{p} \sum_{M \in G} Mx = \frac{1}{p} \sum_{M \in G} x = x$.

Ensuite, si $x \in \text{Im} \left(\frac{A}{p} \right)$, alors on dispose de w dans $\mathbb{R}^n$, $x = \frac{1}{p}Aw$. Mais alors si $M \in G$,

$$Mx = M \frac{1}{p}Aw = \frac{1}{p}M \sum_{N \in G} Nw = \frac{1}{p} \sum_{N \in G} MNw = \frac{1}{p} \sum_{N' \in G} N'w = \frac{1}{p}Aw = x,$$

d'où l'inclusion réciproque et l'égalité !

(ii) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, expliciter un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ de cardinal p .

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. Alors on montre immédiatement que $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, donc si on pose G le sous-groupe engendré par $R_{\frac{2\pi}{p}}$, alors G est cyclique de cardinal p .

DEBUT ↘