FIN ↘

TD21
MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1 (Endomorphismes cycliques). ●●○ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ forme une base de E.

2. Déterminer les matrices de $f, f^2, \dots, f^{n-1}$ dans cette base.

3. Démontrer que $\{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$

Exercice 2 (Sur l'opérateur de différence). On considère l'opérateur de différence

$$\Delta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X] \\ \quad P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array} \right. .$$

1. Représenter la matrice de Δ dans la base canonique au départ et à l'arrivée, et en déduire que Δ est nilpotent.

2. Déterminer, par un raisonnement matriciel, l'image et le noyau de Δ.

On va démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $u^2 = \Delta$. On suppose qu'un tel u existe.

3. Démontrer que u stabilise $\mathbb{C}_1[X]$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Conclure.

Exercice 3. ●●○ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Exercice 4 (Couple de symétries qui anticommutent). Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. ●◐○

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = XY^T$.

2. Prouver que toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1, et donc qu'il existe $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ $2r$ matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = \sum_{i=1}^{r} X_i Y_i^T$.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de df et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \mathrm{tr}(f) f$.

4. À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 6 (Endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). ●●○

1. Déterminer la trace de l'application de transposition sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = MA$. Déterminer $\mathrm{tr}(\varphi)$.

Stratégie/exercices conseillés. En sus des exercices faits en cours, il faut à mon avis :

- parler de base adaptée (11 ou 14),
- faire un exercice avec une application linéaire sur les polynômes (8),
- faire un exercice un peu fin de changement de base (16),

- étudier au moins une fois un commutateur ($AB - BA$) : exercice 21.

Si vous avez du mal, concentrez-vous sur les exercices 13 et 7.

2 Matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 7. ●◐○ Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

Exercice 8. ●○○ Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \dots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.

4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Exercice 9. ●●○ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Quelle est la dimension de E ?

2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.

3. Écrire la matrice représentative A de φ dans la base $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ de E.

4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.

5. Soit $f : x \mapsto (3x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout entier naturel n.

6. Montrer que tout élément f de E admet une unique primitive F élément de E et que $\psi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E.

7. **(i)** Déterminer la matrice B de ψ dans la base $\mathscr{B}$.

(ii) Quel lien y a-t-il entre A et B ?

Exercice 10. ●◐○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. ●●○ Soit u un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-evdf. Représenter $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ dans une base $\mathscr{E}$ qui fasse apparaître le plus de zéros possible, lorsque...

1. $u^2 = 0$.

2. $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.

3. $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

4. $\ker(u)$ est un hyperplan de E.

Exercice 12. ●●○

1. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

2. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{3n}\right)$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\ u^2$. En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

3 Matrices de passage – matrices semblables et équivalentes

Exercice 13. ●○○ Dans cet exercice on notera $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée.
2. Donner une base du noyau de f.
3. Donner une équation de l'image de f.
4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.
   (i) Montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (ii) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$?
5. **(i)** Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.
   (ii) Quelle est la matrice $C = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ de f dans la base B' ?
6. Calculer P^{-1}.

Exercice 14. ●○○

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 15. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension n. On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E ?
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Exercice 16. ●●◐

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 17. ●●○ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec $\dim E = 3$, tel que $f^2 = 2f - \mathrm{Id}$, $f \neq \mathrm{Id}$.

1. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1}.

2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \ker(f - \mathrm{Id})$.

3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Calculer A^n.

Exercice 18. ●●◐ Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante égalle à 0, non constante égale à 1 telle que pour toutes A et B, $f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Déterminer $f(\mathrm{I}_n)$ et $f(0)$.

2. Démontrer que si A est inversible, $f(A) \neq 0$.

3. Démontrer que si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

4 Autres exercices

Exercice 19. ●○○ Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})),\mathbb{K}}$.

Exercice 20. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + {}^{\mathrm{t}}X = \mathrm{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (Sur l'application $AB - BA$)**.** ●●◐ On considère l'application Ψ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\Psi(A, B) = AB - BA.$$

1. I_n est-elle dans l'image de Ψ ?

2. Soit A tel qu'il existe B vérifiant $\Psi(A, B) = A$. Calculer $\mathrm{tr}(A^p)$ pour tout entier p.

3. Déterminer l'image de Ψ.

Exercice 22. ●●◐

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer tous les endormorphismes de E tels que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$

2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A vérifiant $AM = MA$ pour toute matrice M.

3. Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.

4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Identifier f.

5. Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 23 (X MP 2014). ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.

2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ de cardinal p. Soit $A = \displaystyle\sum_{M \in G} M$

- **(a)** Vérifier que $\dfrac{A}{p}$ est idempotente.
- **(b)** On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
- **(c)** Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier divisible par p.

3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall M \in G, Mx = x\}$.

- **(i)** Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension égale à $\mathrm{tr}(A)/p$.
- **(ii)** Pour $p \in N^*$, expliciter un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ de cardinal p.

Indications.

1 **1.** Partir de x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et partir d'une relation de liaison entre $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, à laquelle on applique suffisamment de fois f.

2. Utiliser ou bien des produits matriciels, ou bien calculer $f^k(f^i(x_0))$.

3. Utiliser le fait que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On peut , si $g \in \mathscr{L}(E)$ commute avec f, s'intéresser à déterminer la forme de la matrice de g dans cette base.

2 **1.** Remarquer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.

2. Montrer d'abord des inclusions, puis des égalités (utiliser le théorème du rang).

3. Utiliser que $\mathbb{C}_1[X] = \ker(\Delta^2)$.

4. Prendre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

5. Utiliser $v : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_1[X] \to \mathbb{C}_1[X] \\ x \mapsto v(x) \end{array} \right.$.

3 Utiliser le fait que A et B sont des matrices de symétries, donc sont semblables à des matrices bien connues !

5 **1.** Utiliser le fait que M est équivalente à $J_{n,n,1}$, ou le fait que toutes les colonnes de M sont proportionnelles.

2. Utiliser l'équivalence à $J_{n,n,r}$.

3. Utiliser l'écriture matricielle !

4. Utiliser le fait qu'on doit avoir $f^2 = f$.

6 **1.** Déterminer la matrice de l'application dans la base canonique ou dans une base adaptée à la décomposition $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$.

2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots E_{2n}, \dots)$

11 Utiliser des bases adaptées ! Partir par exemple d'une base du noyau, que l'on complète en une base de E. Ou, si on a $F \subset G \subset E$, partir d'une base de F, complétée en une base de G, complétée en une base de E.

10 Partir de $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2(x) \neq 0$ et montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E.

7 Penser à utiliser la définition de l'écriture d'une matrice dans une base. Ensuite, pas nécessaire d'utiliser la matrice pour déterminer le noyau et l'image !

8 **1.** Ne pas oublier les deux parties du mot **endo**-**morphisme**.

2. Remarquer qu'il s'agit d'une famille de polynômes à degrés échelonnés.

3. On doit normalement trouver une famille diagonale.

4. Penser au fait qu'une matrice diagonale est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

9 **1.** Démontrer que (f_1, f_2) est libre.

2. Vérifier que $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ sont toujours dans E.

3. Normalement les images de f_1 et f_2 par φ ont déjà été calculées.

4. Calculer A^2, A^3 et faire une récurrence immédiate.
5. Utiliser la représentation matricielle.
6. Toute la difficulté réside dans la détermination de la constante de primitivation ! Elle doit notamment aboutir à une application linéaire.
7. **(i)** Normalement les calculs ont déjà été faits !
   (ii)

13 **1.** Essayer de ne faire aucun calcul et utiliser l'expression de f.
2. Résoudre un système homogène.
3. Résoudre un système inhomogène.
4. **(i)** Inverer la matrice de $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique.
   (ii) Si vous avez suivi les indications, c'est la matrice que vous venez d'inverser !
5. **(i)**
   (ii) Utiliser la question précédente !
6. Elle a déjà été calculée à la question (i).

15 **1.** C'est du cours !
2. Faire un simple calcul.
3. Démontrer qu'on a trouvé ainsi une famille libre, donc une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et traduire ceci à l'aide de l'isomorphismes entre les applications linéaires et les matrices d'applications linéaires.

16 **1.** Revoir le dernier exo du premier chapitre d'algèbre linéaire.
2. Faire une récurrence ! En utilisant x tel que $(x, f(x))$ est libre, compléter cette famille en une base, et écrire la matrice de f dans cette base complétée. Elle doit commencer par un 0 en haut à gauche.

14 **1.** Utiliser le fait que deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang.
2. Montrer d'abord que $\varphi(A)$ est non nulle si A est inversible. Puis utiliser la question précédente.

17 **1.** Écrire $f \circ ($ une expression en $f) = \mathrm{Id}$.
2. Déclarer proprement ses variables.
3. Montrer que $f - \mathrm{Id}$ est de rang 1, compléter $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ en une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
4. Calculer A^2 puis faire une récurrence immédiate.

18 **1.** Élémentaire.
2. Idem.
3. Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.

20 Raisonner par analyse-synthèse, prendre la trace et distinguer selon les valeurs de $\mathrm{tr}(A)$.

21 **1.** Non !

2. Utiliser que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3. Utiliser qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

?? Prendre un élément du noyau et supposer par l'absurde qu'il est non nul. Prendre alors sa coordonnée de plus grand module.

22 **1.** On l'a déjà fait en classe !

2. On l'a déjà fait en TD !

3. Engendrer les E_{ij} avec les T_{ij}

4. Montrer que f est une homothétie.

5. Attention, toutes les homothéties ne sont pas inversibles.

23 **1.** C'est du cours !

2. **(a)** Utiliser que $M \mapsto NM$ est une bijection (encore !)

(b) Utiliser le fait que la trace d'un projecteur est son rang.

(c) Idem.

3. **(i)** Utiliser le fait que A est un projecteur.

(ii) S'intéresser aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

DEBUT ↖