FIN ↘

TD22
INTÉGRATION SUR UN SEGMENT
(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●◐○ Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, n dans $\mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \int_0^1 t^k f(t) dt = 0.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Alors P s'écrit sous la forme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec $(a_0, \dots, a_n)$ $n+1$ réels. Alors

$$\int_0^1 P(t)f(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_k t^k f(t)dt = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 a_k t^k f(t)dt = 0,$$

par l'hypothèse de début d'exercice.

2. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]0,1[$.

Nommons Z l'ensemble des points d'annulation de f sur l'ouvert $]0,1[$:

$$Z \overset{\text{def.}}{=} \{x \in]0,1[\mid f(x) = 0\}.$$

Par l'absurde, supposons que cet ensemble admet au plus n éléments.

1° D'abord, supposons par l'absurde que f est à valeurs positives sur l'ouvert $]0,1[$. Alors, par continuité de f et par passage à la limite dans les inégalités larges, f est à valeurs positives sur le fermé $[0,1]$. Or $\int_{[0,1]} f = 0$ et f est continue ; donc f est nulle sur $[0,1]$. Donc Z est infini. Absurde ! Ainsi, f n'est pas à valeurs positives sur l'ouvert $]0,1[$.

De même, en considérant la fonction continue $-f$, on trouve que f n'est pas à valeurs négatives sur l'ouvert $]0,1[$.

D'où, l'ensemble fini Z est non vide et il admet au moins un élément en lequel f change de signe.

2° Ensuite, soit $x_1, \ldots, x_m$ les points de Z en lesquels f s'annulent en changeant de signe. Alors $m \leqslant n$. Posons $P : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \prod_{k=1}^{m}(x - x_k)$. Alors P change de signe en $x_1, \ldots, x_m$. Donc Pf est de signe constant sur $[0,1]$. Or, $\deg(P) \leqslant m \leqslant n$. Donc $\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$, donc, comme Pf est continue et de signe constant, $Pf = 0$. Donc f est nulle en tout point différent de $(x_1, \ldots, x_m)$, donc f s'annule une infinité de fois, absurde !

Donc f s'annule au moins $n+1$ fois.

Exercice 2 (Autour de la valeur moyenne d'une fonction). ●●○ Si $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on définit sa valeur moyenne comme

$$\mathrm{VM}_{[a,b]}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

1. (premier théorème de la moyenne) Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mathrm{VM}_{[a,b]} f$.

Soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b m dt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b M dt,$$

i.e. $m \leqslant \mathrm{VM}_{[a,b]}(f) \leqslant M$. Soient α un antécédent de m et β un antécédent de M. Alors f est continue, $\mathrm{VM}_{[a,b]}(f)$ est entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c entre α et β tel que $f(c) = \mathrm{VM}_{[a,b]}(f)$.

---

2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $[0,1]$.

Posons $g : t \mapsto f(t) - t$. Calculons

$$\int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 f(t) - tdt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Si g ne s'annulait pas sur $[0,1]$, alors g serait de signe constant, continue, et $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = 0$, donc g serait nulle sur $[0,1]$, absurde. Donc g s'annule sur $[0,1]$. Donc on dispose de $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$, i.e. de $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

---

3. (second théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, avec g positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Retrouver à l'aide de ce résultat le premier théorème de la moyenne.

Soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$, α un antécédent de m et β un antécédent de M. Alors, par positivité de g, pour tout t dans $[a,b]$, $f(\alpha)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(\beta)g(t)$, donc, en intégrant,

$$f(\alpha)\int_a^b g(t)dt \leqslant \int_a^b f(t)g(t)dt \leqslant f(\beta)\int_a^b f(t)dt,$$

donc, comme on peut supposer g non nulle (sinon la question est évidente), $\int_a^b g(t)dt > 0$, donc

$$f(\alpha) \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)} \leqslant f(\beta),$$

donc $\frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)}$ est entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ donc on dispose de c entre α et β tel que

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)},$$

i.e.

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t).$$

En prenant pour g la fonction constante égale à 1, on retrouve la première question.

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)dt \text{ et } v_n = \int_0^1 f(t^n)dt.$$

1. Déterminer les limites de (u_n) et (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

Pour la première limite, comme f est continue elle est bornée sur $[0,1]$, par $M > 0$, et on écrit juste que

$$|u_n| \leqslant \int_0^1 t^n M dt = \frac{M}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pour la deuxième, l'idée est que quand n tend vers $+\infty$, $f(t^n) \to f(0)$, donc on veut dire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0).$$

On étudie alors

$$v_n - f(0) = \int_0^1 f(t^n) - f(0)dt.$$

Là, une majoration n'est pas simple, car $f(t^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ mais pas à la même vitesse pour tous les t. On fixe un $\varepsilon > 0$. On écrit alors que

$$v_n - f(0) = \int_0^{1-\varepsilon} f(t^n) - f(0)dt + \int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n) - f(0)dt.$$

On a alors, en notant $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$$\left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n) - f(0)dt\right| \leqslant \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t^n)| + |f(0)|dt \leqslant 2M\varepsilon.$$

Ensuite, l'idée est que pour tous les $t \leqslant 1-\varepsilon$, t^n tend + vite vers 0 que $(1-\varepsilon)^n$. On prend alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in [0, \delta]$, $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$. On prend N tel que pour tout $n \geqslant N$, $(1-\varepsilon)^n \leqslant \delta$. Alors pour tout $t \in [0, 1-\varepsilon]$, pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant t^n \leqslant (1-\varepsilon)^n \leqslant \delta$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{1-\varepsilon} f(t^n) - f(0)dt\right| &\leqslant \int_0^{1-\varepsilon} |f(t^n) - f(0)|dt \\ &\leqslant \int_0^{1-\varepsilon} \varepsilon dt \leqslant (1-\varepsilon)\varepsilon \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$, $|v_n - f(0)| \leqslant (2M+1)\varepsilon$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.

2. Lorsque f est $\mathscr{C}^1$ et $f(1) \neq 0$, déterminer un équivalent de (v_n).

Là, on fait une IPP :

$$\begin{aligned} u_n &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}f(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}f'(t)dt \\ &= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)dt. \end{aligned}$$

Par la question précédente, $\displaystyle\int_0^1 t^{n+1}f'(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)dt \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(1)}{n}$.

Exercice 4. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2.

1. En appliquant l'égalité de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + h\dfrac{M_2}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x+th)$. Alors φ est deux fois continûment dérivable, et pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi'(t) = f'(x+th)h$ et $\varphi''(t) = f''(x+th = h^2$. Donc, en appliquant l'égalité de Taylor avec reste intégral à la fonction φ entre 0 et 1 à l'ordre 2, on trouve le résultat en isolant $f'(x)$ et en utilisant l'inégalité triangulaire intégrale.

---

2. En déduire que $|f'|$ est bornée par au moins un réel M_1 qui vérifie $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

La demande équivaut à ce que $|f'|$ soit bornée par $2\sqrt{M_0M_2}$.

1° Supposons que $M_0 = 0$.

Alors f est constante égale à 0, puis f' également. Donc l'inégalité visée est vérifiée.

2° Supposons que $M_2 = 0$.

Alors f'' est constante égale à 0. Donc f est une fonction affine. Or f est bornée ; donc f est constante, puis f' est nulle. Donc l'inégalité visée est vérifiée.

3° Supposons que M_0 et M_2 autrement.

Alors $M_0, M_2 > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant ce que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$,

$$\left(\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \right) \wedge \left(a = b \implies \frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \right)$$

on trouve $h \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{2M_0}{h} + h\frac{M_2}{2} = 2\sqrt{M_0 M_2} \,.$$

Donc l'inégalité visée est vérifiée.

En somme, linégalité est vérifiée en tout cas.

Exercice 5. ●○○ Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, des suites définies par

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha n + \beta k}$ (avec $\alpha > 0, \beta > 0$)

2. $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Pour u_n, on écrit

$$u_n = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \beta \frac{k}{n}},$$

somme de Riemann associée à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\alpha + \beta t}$, entre 0 et 11. On sait alors qu'elle converge vers

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{\alpha + \beta t} dt = \frac{1}{\beta}(\ln(\alpha + \beta t) - \ln(\alpha)) = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} t\right).$$

Pour v_n, on pose $w_n = \ln(v_n)$. Alors

$$w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right),$$

somme de Riemann associée à la fonction $t \mapsto \ln(1+t^2)$ entre 0 et 1. Alors w_n converge vers

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)dt,$$

qui se calcule en posant $u'(t) = 1$, $v(t) = \ln(1+t^2)$, donc $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+t^2)dt &= [t\ln(1+t^2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}dt \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 1 - \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \ln(2) - 2 + 2\mathrm{Arctan}(1) - 2\mathrm{Arctan}(0) \\ &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc v_n converge vers $2e^{\frac{\pi}{2}-2}$.

2 Construction de l'intégrale – approximation

Exercice 6. ●◐○

1. Démontrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Soit f une fonction lipschitzienne sur un intervalle I, k sa constante de Lipschitz. Alors pour tous x et y dans I, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Soient x et y tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k\eta = \varepsilon,$$

donc f est uniformément continue.

2. Montrer que la fonction racine carrée est u.c. mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

- Montrons que la fonction racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

  Soit $\varepsilon > 0$. Soient x et y dans $\mathbb{R}_+$, tels que $x < y$ (afin d'éviter les valeurs absolues). Alors $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$: en effet, comme toutes les quantités sont positives, l'inégalité équivaut à $y - 2\sqrt{xy} + x \leqslant y - x$, i.e. $x \leqslant \sqrt{xy}$, ce qui est vrai puisqu'on a supposé $x < y$.

  Posons alors $\eta = \varepsilon^2$. Soient x et y tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

  Donc la racine est uniformément continue.

- Supposons maintenant que la fonction racine soit lipschitzienne de constante de Lipschtz K. On aurait alors, pour tous x et y dans $\mathbb{R}_+$ on ait $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant K|x-y|$. En particulier (pour $y = 0$), pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, on aurait $\sqrt{x} \leqslant K|x|$, i.e., si $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant K$, absurde en faisant tendre x vers 0.

Exercice 7. ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$\forall x > 0, f(nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2$, $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

On sait que $f(n\eta) \underset{\infty}{\longrightarrow} 0$, donc on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|f(n\eta)| \leqslant \varepsilon$.

Posons alors $M = n\eta$. Soit $x \geqslant M$. Soit m tel que $m\eta \leqslant x \leqslant (m+1)\eta$. Alors $|x - m\eta| \leqslant \eta$, donc $|f(x) - f(m\eta)| \leqslant \varepsilon$, donc

$$|f(x)| = |f(x) - f(m\eta) + f(m\eta)| \leqslant |f(x) - f(m\eta)| + |f(m\eta)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

d'où le résultat ! (si on veut être parfaits, il suffit de prendre $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$).

Exercice 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue). ●●● Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On commencera par démontrer le résultat pour des fonctions en escalier, puis on utilisera le résultat de densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

Montrons déjà le résultat pour les fonctions en escalier. Soit f une fonction en escalier. Alors on dispose de $a_0, \dots, a_n$ et de $f_0, \dots f_{n-1}$ tels que f est constante égale à f_k sur $]a_k, a_{k+1}[$. Alors

$$\begin{aligned}\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t} f(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t} f_k dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \int_{a_k}^{a_{k+1}} e^{i\lambda t} dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \left[\frac{e^{i\lambda t}}{i\lambda}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}. \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f_k \frac{e^{i\lambda a_{k+1}} - e^{i\lambda a_k}}{i\lambda}.\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f_k \frac{2}{|\lambda|} \leqslant \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} 2f_k \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat pour les fonctions en escalier.

Cas général. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varepsilon' > 0$ dont on fixera la valeur plus tard. Soit ρ une fonction en escalier telle que $\|f - \rho\|_\infty \leqslant \varepsilon'$. Soit Λ un réel tel que pour tout

$\lambda \geqslant \Lambda$, $\left|\int_a^b \rho(t)dt\right| \leqslant \varepsilon'$. Soit alors $\lambda \geqslant \Lambda$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t)dt\right| &= \left|\int_a^b e^{i\lambda t} f(t) - e^{i\lambda t} e^{i\lambda t}\rho(t) + \rho(t)dt\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^b e^{i\lambda t}(f(t) - \rho(t))dt\right| + \left|\int_a^b e^{i\lambda t}\rho(t)dt\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(t) - \rho(t)|dt + \varepsilon' \\
&\leqslant \int_a^b \|f - \rho\|_\infty \, dt + \varepsilon' \\
&\leqslant (b-a)\|f - \rho\|_\infty + \varepsilon' \\
&\leqslant (b - a + 1)\varepsilon'.
\end{aligned}$$

En posat $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{b - a + 1}$, on a le résultat souhaité.

3 Calculs d'intégrales

Exercice 9. ●○○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x + \sin(x)} dx$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(4x)dx$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

Pour I_1, il suffit de faire une intégration directe :

$$\boxed{I_1 = \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_1^5 x^{-\frac{3}{2}} dx = \left[\frac{1}{-\frac{3}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^5 = -2[1/\sqrt{x}]_1^5 = 2 - \frac{2}{\sqrt{5}}.}$$

Pour I_2, on remarque que $\cos^2(x/2) = \frac{1}{2}(1+\cos(x))$, donc

$$\mathrm{I}_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(x)}{x+\sin(x)}dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x+\sin(x)|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).}$$

Pour I_3, on remarque que, comme $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, une primitive de tan est $-\ln|\cos|$. Donc

$$\boxed{\mathrm{I}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(4x)dx = \left[\frac{-1}{4}\ln|\cos(4x)|\right]_0^{\frac{\pi}{12}} = -\frac{1}{4}(\ln\frac{1}{2} - 0) = \frac{\ln(2)}{4}.}$$

Pour I_4, on remarque que $\frac{1}{e^x+1} = \frac{1+e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$, donc on trouve facilement une primitive en $x \mapsto x - \ln(1+e^x)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{I}_4 = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \mathrm{I}_4 = \int_0^1 1 - \frac{e^x}{1+e^x}dx = [x - \ln(1+e^x)]_0^1 = 1 - \ln(1+e) + \ln(2).}$$

Exercice 10. ●●○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $J_1 = \int_{2a}^{3a} \frac{t^3}{t^2-a^2}dt$ $(a>0)$
2. $J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4(x)}{\sin^6(x)}dx$
3. $J_3 = \int_1^2 x\sqrt{x}\ln(x)dx$
4. $J_4 = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ (poser $x = \sin^2(t)$).
5. $J_5 = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$
6. $J_6 = \int_0^1 e^{\mathrm{Arcsin}(x)}dx$

(i) Pour J_1, on effectue une décomposition en éléments simples, en pensant bien à commencer par une division euclidienne (attention, on a tendance à l'oublier) :

$$t^3 = (t^2 - a^2).t + a^2 t, \text{ donc } \frac{t^3}{t^2 - a^2} = t + \frac{a^2 t}{t^2 - a^2}.$$

Ensuite, on remarque que $t^2 - a^2 = (t-a)(t+a)$ donc que l'on dispose de α et β tels que $\frac{a^2 t}{t^2 - a^2} = \frac{\alpha}{t-a} + \frac{\beta}{t+a}$. En multipliant par $t-a$ et en évaluant en a, on obtient $\alpha = \frac{a^2}{2}$ et, de même, $\beta = \frac{a^2}{2}$. Donc, finalement,

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{2a}^{3a} \frac{t^3}{t^2 - a^2} dt \\
&= \int_{2a}^{3a} t + \frac{a^2}{2(t-a)} + \frac{a^2}{2(t+a)} dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln|t-a| + \frac{a^2}{2} \ln|t+a|\right]_{2a}^{3a} \\
&= \frac{9a^2}{2} - \frac{4a^2}{2} + \frac{a^2}{2}(\ln(2a) - \ln(a)) + \frac{a^2}{2}(\ln(4a) - \ln(3a)) \\
&= \frac{5a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln(2) + \frac{a^2}{2} \ln(4/3).
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{J_1 = \frac{5a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{8}{3}.}$

Pour J_2, on remarque que

$$J_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^6(x)}{\sin^6(x)} \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(x)^{-6} \frac{1}{\cos^2(x)} dx.$$

On reconnaît $u^n u'$ avec $u = \tan$! D'où

$$J_2 = \left[-\frac{1}{5} \tan(x)^{-5}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{5}\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-5} - \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-5}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}} - 1\right),$$

d'où $\boxed{J_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{45\sqrt{3}}.}$

Pour calculer J_3, on effectue une intégration par parties, en posant $u'(x) = x^{\frac{3}{2}}$, donc $u(x) = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$ et

$v(x) = \ln(x)$ donc $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Donc

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_1^2 x\sqrt{x}\ln(x)dx \\ &= \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\frac{1}{x}dx \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{5}\ln(2) - \left[\frac{4}{25}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^2 \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{5}\ln(2) - \frac{16\sqrt{2}}{25} + \frac{4}{25} \end{aligned}$$

On pose, comme indiqué, $t = \text{Arcsin}(\sqrt{x})$. Quand $x = \dfrac{1}{4}$, $t = \text{Arcsin}(1/2) = \dfrac{\pi}{6}$. Quand $x = \dfrac{3}{4}$, $t = \text{Arcsin}(\sqrt{3}2) = \dfrac{\pi}{3}$. Ensuite, $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}} = \sqrt{\dfrac{\sin^2(t)}{1-\sin^2(t)}} = \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}$, car t est entre $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

Enfin, $\dfrac{dx}{dt} = 2\sin(t)\cos(t)$, donc

$$\begin{aligned} J_4 &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}2\sin(t)\cos(t)dt \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(t)dt \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt \\ &= \left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

donc $\boxed{J_4 = \dfrac{\pi}{6}.}$

Pour calculer $J_5 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}dx$, on pense encore à un changement de variable en sin, mais on n'a pas exactement ce que l'on voudrait... Si on avait $1 - u^2$, cela serait plus pratique : mais, en posant

$u = x - 1$, alors $x = u + 1$ et $2x - x^2 = 2u + 2 - u^2 - 2u - 1 = 1 - u^2$! ! Donc

$$J_5 = \int_{-1}^{0} \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{4}$$

(c'est l'aire du quart de cercle : cf. cours pour le calcul détaillé !)

Enfin, pour calculer $\int_0^1 e^{\text{Arcsin}(x)}dx$, c'est clairement le Arcsin qui nous embête, donc on le pose comme nouvelle variable :

Posons $u = \text{Arcsin}(x)$. Alors quand $x = 0$, $u = 0$. Quand $x = 1$, $u = \text{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$.

Ensuite, $e^{\text{Arcsin}(x)} = e^u$.

Enfin, $x = \sin(u)$ donc $dx = \cos(u)du$. Donc

$$\begin{aligned} J_6 &= \int_0^1 e^{\text{Arcsin}(x)}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^u \cos(u)du = \mathfrak{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{u+iu}du\right) = \mathfrak{Re}\left(\left[\frac{e^{u+iu}}{1+i}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-i}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right) \\ &= \mathfrak{Re}\left(\frac{1-i}{2}\left(ie^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{J_6 = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}.}$

Exercice 11. ●●○ Soit $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante. Montrer que $\int_a^b f(t)dt + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t)dt = b\beta - a\alpha$.

Dans la seconde intégrale, posons $s = f^{-1}(t)$.

Alors quand $t = \alpha$, $s = a$ et quand $t = \beta$, $s = b$, $f^{-1}(t) = s$ et $t = f(s)$ donc $dt = f'(s)ds$, donc $\int_\alpha^\beta f^{-1}(t)dt = \int_a^b sf'(s)ds$, donc

$$\int_a^b f(t)dt + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t)dt = \int_a^b f(t) + tf'(t)dt = [tf(t)]_a^b = bf(b) - af(a) = a\alpha - b\beta.$$

4 Suites et intégrales (sommes de Riemann & Cie)

Exercice 12. ●●○

1. Déterminer les limites suivantes (quand n tend vers $+\infty$)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$,

(c) $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.

(a) Ici, on a presque directement une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : t \mapsto t^2 \sin(\pi t)$. Donc, par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 t^2 \sin(\pi t)dt \\
&\underset{\substack{u(t)=t^2,\ u'(t)=2t \\ v'(t)=\sin(\pi t),\ v(t)=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)}}{=} \left[-\frac{t^2}{\pi}\cos(\pi t)\right]_0^1 + \frac{2}{\pi}\int_0^1 t\cos(\pi t)dt \\
&\underset{\substack{u(t)=t,\ u'(t)=1 \\ v'(t)=\cos(\pi t),\ v(t)=\frac{1}{\pi}\sin(\pi t)}}{=} \pi + \left[2\frac{t}{\pi^2}\sin(\pi t)\right] - \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 \sin(\pi t)dt \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.
\end{aligned}$$

(b) Là, il faut un peu plus forcer le destin pour faire apparaître la somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}},$$

qui converge vers

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}}\\ &= \frac{1}{2}\left[2\mathrm{Arcsin}\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^1\\ &= \mathrm{Arcsin}\frac{1}{2} - \mathrm{Arcsin}(0) = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

(c) Ici, c'est a priori un peu plus dur de faire apparaître une somme de Riemann, mais on a déjà vu ce genre de méthode dans l'exercice corrigé en cours ! Déjà, on écrit que

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\ln\left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t)dt\\ &= [(1+t)\ln(1+t)-(1+t)]_0^1 = 2\ln(2)-1.\end{aligned}$$

---

2. Soit $p > 0$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $\sum_{k=1}^{n} k^p$.

Là, la somme de Riemann n'est pas évidente à trouver. Mais on peut s'en sortir en la faisant apparaître artificiellement ! On écrit que

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = n^p \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p = n^{p+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

où $f : t \mapsto t^p$. Par le théorème de convergence des sommes de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}.$$

Donc, finalement,

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Exercice 13. ●◐○ Soit, pour $n \geqslant 0$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx$.

1. Étudier la monotonie de (u_n).

Soit n dans $\mathbb{N}$. On sait que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$. Donc pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan(x)^{n+1} \leqslant \tan(x)^n$. D'où, en intégrant, $u_{n+1} \leqslant u_n$. Donc (u_n) est décroissante.

2. En calculant $u_{n+2} + u_n$, déterminer la limite ℓ de u_n.

Déjà, décroissante et positive, u_n converge. Ensuite, si n est dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2}+u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n + 2dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n(1+\tan(x)^2)dx \\ &= \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Or, (u_{n+2}) et (u_n) convergent vers la même limite ℓ, donc $u_{n+2}+u_n \underset{+\infty}{\longrightarrow} 2\ell$. Donc, comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ell = 0$.

---

3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Par décroissance, on a pour tout n, $2u_{n+2} \leqslant u_{n+2}+u_n \leqslant 2u_n$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n,$$

donc, pour tout $n \geqslant 2$, $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}$ (pour la deuxième inégalité, on a pris $n-2$ au lieu de n). Or, $\dfrac{1}{2(n+1)} \sim \dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{2(n-1)} \sim \dfrac{1}{2n}$ donc, par encadrement, $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 14. ●●◐ Soit $f : [a, b+1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = n\int_a^b \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right) dx.$$

Soit F une primitive de f. Alors $x \mapsto F\left(x+\frac{1}{n}\right)$ est une primitive de $x \mapsto f\left(x+\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} n\int_a^b \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)dx &= n\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right]_a^b \\ &= \frac{F\left(b+\frac{1}{n}\right)-F(b)}{\frac{1}{n}} - \frac{F\left(a+\frac{1}{n}\right)-F(a)}{\frac{1}{n}} \\ &\underset{+\infty}{\longrightarrow} F'(b)-F'(a) = f(b)-f(a) \text{ car } F \text{ est dérivable.} \end{aligned}$$

5 Intégrales fonctions des bornes

Exercice 15. ●○○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Soit F une primitive de F sur $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt &= \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} \\ &= F'(0) = f(0). \end{aligned}$$

Exercice 16. ●○○ Soit $\varphi : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ donc admet une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$ et une primitive G sur $\mathbb{R}_-^*$. Si $x > 0$, $\varphi(x) = F(2x) - F(x)$, fonction dérivable quel que soit $x > 0$. De même si $x < 0$, $\varphi(x) = G(2x) - G(x)$, dérivable en tout $x < 0$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} \varphi(x)$.

On va encadrer l'intégrale : reste à savoir s'il s'agit de e^t ou de $\dfrac{1}{t}$ que l'on va encadrer. Si $x>0$, si $x \leqslant t \leqslant 2x$, alors $e^x \leqslant e^t \leqslant e^{2x}$, donc

$$e^x \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant \varphi(x) \leqslant e^{2x} \int_x^{2x} \frac{dt}{t},$$

i.e.

$$e^x(\ln(2x)-\ln(x)) \leqslant \varphi(x) \leqslant e^{2x}(\ln(2x)-\ln(x)).$$

Comme $\ln(2x)-\ln(x)=\ln(2)$, en faisant tendre x vers $0<$ on obtient $\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \ln(2)$.
Si $x<0$, alors $\varphi(x)=\displaystyle\int_{2x}^{x} \frac{e^t}{-t}dt$, et pour tout t dans $[2x,x]$, $\dfrac{e^{2x}}{-t} \leqslant \dfrac{e^t}{-t} \leqslant \dfrac{e^x}{-t}$, et les inégalités précédentes s'adaptent, donc $\varphi(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \ln(2)$.

---

3. Montrer que l'on peut prolonger φ par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement.

La dérivée de φ est, pour tout x de $\mathbb{R}^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x}.$$

Or, $\dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{e^x}{x} = \dfrac{1+2x-1-x+o(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc, par le théorème de limite de la dérivée, φ est aussi dérivable en 0.

---

4. Démontrer que $\dfrac{\varphi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On remarque, quand x tend vers $+\infty$, que $\dfrac{\varphi(x)}{x} \geqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^x}{2x}dt = \frac{e^x}{2x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc φ admet une « branche parabolique d'axe (Oy) » en $+\infty$.

5. Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

Soit $x < 0$. Alors $2x < x$ et pour tout t dans $[2x, x]$,

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{2x},$$

donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\frac{e^{2x}}{x} \leqslant \frac{e^{t}}{t} \leqslant \frac{e^{x}}{2x},$$

donc, en intégrant entre $2x$ et x.

$$\int_{2x}^{x} \frac{e^{2x}}{x} dt \leqslant \int_{2x}^{x} \frac{e^{t}}{t} dt \leqslant \int_{2x}^{x} \frac{e^{x}}{2x} dt,$$

i.e.

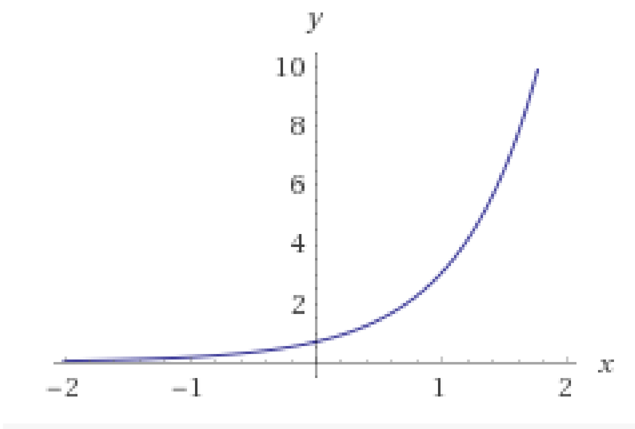
$$-e^{2x} \leqslant -\varphi(x) \leqslant -\frac{e^{x}}{2}$$

donc

$$\frac{e^{x}}{2} \leqslant \varphi(x) \leqslant e^{2x},$$

d'où, par encadrement, $\varphi(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ de φ.



Exercice 17. ●●○ Soit $k \in]0,1[$. On définit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt.$$

1. Déterminer le domaine D de définition de F et montrer que F est impaire.

La fonction $t \mapsto \sqrt{1-k\sin^2(t)}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$ car $k \in]0,1[$. Donc F est définie sur tout $\mathbb{R}$. Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$,

$$F(-x) = \int_0^{-x} \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt.$$

On fait le changement de variables $s=-t$. Alors $\sqrt{1-k\sin^2(t)} = \sqrt{1-k\sin^2(-s)} = \sqrt{1-k\sin^2(s)}$ et $dt = -ds$, d'où

$$F(-x) = \int_0^{x} \sqrt{1-k\sin^2(s)}(-ds) = -F(x).$$

Donc F est impaire.

On pose $a = F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Calculer $F(\pi)$ en fonction de a.

On remarque que $F(\pi) = F(\pi/2) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt = a + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt$. Pour calculer la seconde intégrale, posons $s = t - \pi$. Alors quand t vaut $\frac{\pi}{2}$, s vaut $-\frac{\pi}{2}$ et quand t vaut π, s vaut 0. Ensuite, $\sin^2(t) = \sin^2(s - \pi) = \sin^2(s)$. Enfin, $dt = ds$. D'où

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt \\
&= -\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt \\
&= -F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= F\left(\frac{\pi}{2}\right) = a.
\end{aligned}$$

Donc $F(\pi) = 2a$.

3. Montrer que F est dérivable et strictement monotone sur D.

F est une primitive de $t \mapsto \sqrt{1 - k\sin^2(t)}$, continue sur $\mathbb{R}$, donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, $F'(x) = \sqrt{1 - k\sin^2(x)}$. En particulier F' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. **(i)** Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F(x + n\pi) = F(x) + 2na$.

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
F(x + n\pi) &= \int_0^{x+n\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt \\
&= \int_0^{n\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt + \int_{n\pi}^{x+n\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} \int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt + \int_{n\pi}^{x+n\pi} \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt.
\end{aligned}$$

Montrons que pour tout p, pour tout y, $\int_{p\pi}^{y+p\pi} \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt = \int_0^y \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt$. Effectuons le changement de variables $s = t - p\pi$. Alors quand $t = p\pi$, $s = 0$ et quand $t = y + p\pi$, $s = y$. Ensuite $\sin^2(t) = \sin^2(s - p\pi) = \sin^2(s)$ et $ds = dt$. Donc

$$\int_{p\pi}^{y+p\pi} \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt = \int_0^y \sqrt{1-k\sin^2(s)}ds,$$

le résultat est donc démontré, donc $\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt = \int_0^{\pi} \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt$ et $\int_{n\pi}^{x+n\pi} \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt = \int_0^x \sqrt{1-k\sin^2(t)}dt$, donc

$$F(x+n\pi) = nF(\pi) + F(x) = F(x) + 2na.$$

(ii) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

F est strictement croissante, non bornée par la question précédente, donc elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Impaire, elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

---

6 Exercices plus théoriques sur l'intégrale

Exercice 18. ●◐○ Montrer que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. Par la formule de Taylor avec reste intégrale,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{f^{(4)}(t)(x-t)^3}{3!}dt = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{\sin(t)(x-t)^3}{3!}.$$

Le reste intégral est positif car sin est positif sur $[0, \pi/2]$. D'où l'inégalité de gauche. De même,

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{f^{(6)}(t)(x-t)^5}{5!}dt = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{-\sin(t)(x-t)^5}{5!}dt,$$

d'où l'inégalité de droite.

Exercice 19. ●●○ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2. Démontrer que $|f'|$ est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$ (**attention !** ça n'est pas tout à fait l'exercice corrigé en cours !)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $h > 0$. Par les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2},$$

i.e.

$$-\frac{M_2h^2}{2} \leqslant f(x+h) - f(x) - hf'(x) \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$

et, par les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x-h$,

$$\frac{M_2h^2}{2} \leqslant f(x+h) - f(x) + hf'(x) \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$

On réécrit la première inégalité

$$-\frac{M_2h^2}{2} \leqslant -f(x+h) + f(x) + hf'(x) \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$

donc, en sommant les deux inégalités,

$$-M_2h^2 \leqslant f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x) \leqslant M_2h^2,$$

i.e.

$$-M_2h^2 - 2M_0 \leqslant 2hf'(x) \leqslant M_2h^2 + 2M_0,$$

donc

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_2h}{2} + \frac{M_0}{h}.$$

On étudie la fonction de droite, de dérivée $\frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2}$, dérivée qui s'annule en $h = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, négative avant, positive après. Donc la fonction de droite admet un minimum égal à

$$\frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} + \frac{M_0}{\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}} = \sqrt{2M_0M_2},$$

d'où le résultat.

Exercice 20. ●●○

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$ et $\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ tendent vers 0 quand n tend $+\infty$.

Il s'agit, encore et toujours, du lemme de Riemann-Lebesgue. Regardons la première intégrale, en prenant $u(x) = f(x)$ et $v'(x) = \sin(nx)$, donc $u'(x) = f'(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$, donc

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = \left[-\frac{1}{n}f(x)\cos(nx)\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx.$$

Or,

$$\left|\left[-\frac{1}{n}f(x)\cos(nx)\right]_a^b\right| \leqslant \frac{1}{n}\left(|f(a)\cos(na)| + |f(b)\cos(nb)|\right) \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De même,

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)dx\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)\cos(nx)|dx \leqslant \frac{(b-a)\,\|f'\|_\infty}{n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'où le résultat.

---

2. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

Soient α et β deux réels, calculons par double intégration par parties, en prenant $u(t) = \alpha t + \beta t^2$ et $v'(t) = \cos(nt)$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)dt &= \left[(\alpha t + \beta t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (\alpha + 2\beta t)\frac{1}{n}\sin(nt)dt \\
&\quad (\text{posons } u(t) = \alpha + 2\beta t,\ \ v'(t) = \sin(nt)\ ) \\
&= \left[(\alpha t + \beta t^2)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n^2}\left[(\alpha + 2\beta t)\cos(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2\beta}{n^2}\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{n}\left[(\alpha t + \beta t^2)\sin(nt)\right]_0^\pi + \frac{1}{n^2}\left[(\alpha + 2\beta t)\cos(nt)\right]_0^\pi - \frac{1}{n^3}\left[2\beta\sin(nt)\right]_0^\pi \\
&= \frac{(\alpha + 2\beta\pi)(-1)^n - \alpha}{n^2}
\end{aligned}$$

En prenant $\alpha = -1$ et $2\beta\pi = 1$, i.e. $\beta = \dfrac{1}{2\pi}$, on a le résultat désiré.

---

3. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\sum_{n=1}^{N}\cos(nt)dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\cos(nt) &= \mathfrak{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{int}\right)\\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{it}\frac{1-e^{iNt}}{1-e^{it}}\right)\\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{N}{2}t}}{e^{i\frac{t}{2}}}\frac{e^{-i\frac{N}{2}t}-e^{i\frac{N}{2}t}}{e^{-i\frac{t}{2}}-e^{i\frac{t}{2}}}\right)\\
&= \mathfrak{Re}\left(e^{i\frac{N+1}{2}t}\frac{\sin\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\\
&= \frac{\cos\left(\frac{N+1}{2}t\right)\sin\left(\frac{N}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Or, $\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(b+a)+\sin(b-a)\right)$, d'où

$$\sum_{n=1}^{N}\cos(nt) = \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)-\sin\left(\frac{t}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\left(\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-1\right)dt\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)dt
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\alpha t+\beta t^2)dt = -\frac{\alpha\pi^2}{4}-\beta\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 21. ●●○ Soit $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\int_0^\pi f(t)\sin t dt = 0$, alors il existe $a \in]0, \pi[$ tel que f s'annule en a.

Supposons que f ne s'annule pas sur $[0, \pi]$. Alors f est de signe constant sur $[0, \pi]$, tout comme sin. Donc $f(t)\sin(t)$ est de signe constant sur $[0, \pi]$, d'intégrale nulle, donc est nulle, absurde.

---

2. Montrer que si $\int_0^\pi f(t)\sin t dt = \int_0^\pi f(t)\cos t dt = 0$, alors f s'annule 2 fois sur $]0, \pi[$.
(indice : on pourra regarder $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)dt$).

Soit a un réel en lequel f s'annule (par la question précédente). Le problème est que cos change de signe ! Mais

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)dt &= \int_0^\pi f(t)\sin(t)\cos(a)dt + \int_0^\pi f(t)(-\sin(a))\cos(t)dt \\ &= \cos(a)\int_0^\pi f(t)\sin(t)dt - \sin(a)\int_0^\pi \cos(t)f(t)dt = 0,\end{aligned}$$

donc $\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)dt = 0$. Or si on suppose que f ne s'annule qu'une fois en a., alors f change nécessairement de signe (sinon elle serait nulle). Donc $f(t)\sin(t-a)$ est de signe constant, donc f est nulle, absurde.

Exercice 22. ●●◐ Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}_{\text{pm}}$. Montrer que

$$\sqrt{1+\mathrm{VM}_{[0,1]}(f)^2} \leqslant \int_{[0,1]} \sqrt{1+f^2} \leqslant \sqrt{1+\mathrm{VM}_{[0,1]}(f^2)}$$

Pour l'inégalité de droite, on écrit par Cauchy-Schwarz

$$\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2}dt \leqslant \sqrt{\int_0^1 (1+f(t))^2 dt} = \sqrt{1+\mathrm{VM}(f^2)}.$$

Pour l'inégalité de gauche, on remarque que

$$\int_0^1 1dt = \int_0^1 \sqrt{\sqrt{1+f(t)^2} - f(t)}.\sqrt{\sqrt{1+f(t)^2} + f(t)}dt$$

Donc, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2} - f(t)dt\right)\left(\int_0^2 \sqrt{1+f(t)^2} + f(t)dt\right) \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2}dt - \int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^2 \sqrt{1+f(t)^2}dt + \int_0^1 f(t)dt\right) \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2}dt\right)^2 - \left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2, \end{aligned}$$

donc

$$1 + \mathrm{VM}(f)^2 \leqslant \left(\int_0^1 \sqrt{1+f(t)^2}dt\right)^2,$$

d'où le résultat désiré !

Exercice 23. ●●○ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$, concave.

1. Montrer que

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2. Montrer que les inégalités persistent en supposant f seulement continue (on utilisera des sommes de Riemann).

Exercice 24 (Inégalité de Poincaré). ●●◐ Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

On écrit l'expression de f en fonction de f' :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x f'(t)dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient alors

$$f(x)^2 \leqslant \left(\int_0^x dt\right)\left(\int_0^x f'(t)^2 dt\right) \leqslant x\left(\int_0^1 f'(t)^2 dt\right),$$

d'où

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leqslant \int_0^1 x\left(\int_0^1 f'(t)^2 dt\right) dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f'(t)^2 dt\right).$$

Exercice 25. ●●● Si $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la norme L^p de f comme

$$\|f\|_{L^p} = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p dt}.$$

1. Démontrer que $\|f\|_{L^p}$ est une norme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. Démontrer que $\|f\|_{L^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{\infty,[0,1]}$.

On peut supposer f positive sur $[0,1]$, quitte à remplacer f par $|f|$. De même on peut supposer f non identiquement nulle (sinon le résultat est évident). De plus, si on pose $g = \dfrac{f}{\|f\|_\infty}$, alors

- $\|g\|_\infty = 1$ par homogénéité
- $\|g\|_{L^p} = \dfrac{\|f\|_{L^p}}{\|f\|_\infty}$ (la norme L^p est clairement homogène)

Il suffit donc de démontrer que $\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

- déjà, par hypothèse, $\forall t \in [0,1],\ g(t) \leqslant 1$ donc $\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \leqslant 1$.
- ensuite, soit $\varepsilon > 0$. Soit x_0 dans $[0,1]$ tel que $g(x_0) = 1$, soit $\eta > 0$ tel qu'il existe un intervalle

de taille η, contenant x_0, tel que $f(t) \geqslant 1-\varepsilon$ sur cet intervalle (un tel η existe par continuité de g). Alors si $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 g(t)^p dt \geqslant \eta(1-\varepsilon)^p,$$

donc

$$\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geqslant \sqrt[p]{\eta}(1-eps).$$

Comme $\sqrt[p]{\eta} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on doit pouvoir conclure... Mais pour avoir vraiment une minoration en $1-\varepsilon$, on va réécrire notre preuve, en changeant le $1-\varepsilon$ en $\sqrt{1-\varepsilon}$: Soit $\eta > 0$ tel qu'il existe un intervalle de taille η, contenant x_0, tel que $f(t) \geqslant \sqrt{1-\varepsilon}$ sur cet intervalle (un tel η existe par continuité de g). Alors si $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 g(t)^p dt \geqslant \eta(1-\varepsilon)^{\frac{p}{2}},$$

donc

$$\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geqslant \sqrt[p]{\eta}\sqrt{1-eps}.$$

Comme $\sqrt[p]{\eta} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on dispose de $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, $\sqrt[p]{\eta} \geqslant \sqrt{1-\varepsilon}$. Si $p \geqslant p_0$, alors

$$\sqrt[p]{\int_0^1 g(t)^p dt} \geqslant 1-\varepsilon,$$

d'où le résultat désiré !

DEBUT ↖