TD21
Matrices et applications linéaires

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1 (Endomorphismes cycliques)**.** ●●○ Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\mathscr{B} = \left(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ forme une base de E.

2. Déterminer les matrices de $f, f^2, \dots, f^{n-1}$ dans cette base.

3. Démontrer que $\{g \in \mathscr{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$

Exercice 2 (Sur l'opérateur de différence)**.** On considère l'opérateur de différence

$$\Delta : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X] \\ \quad P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array} \right. .$$

1. Représenter la matrice de Δ dans la base canonique au départ et à l'arrivée, et en déduire que Δ est nilpotent.

2. Déterminer, par un raisonnement matriciel, l'image et le noyau de Δ.

On va démontrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que $u^2 = \Delta$. On suppose qu'un tel u existe.

3. Démontrer que u stabilise $\mathbb{C}_1[X]$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Conclure.

Exercice 3. ●●○ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = I_n$. Démontrer que A et B sont semblables si et seulement si elles ont même trace.

Exercice 4 (Couple de symétries qui anticommutent)**.** Soient E un espace vectoriel de dimension finie et f, g des endomorphismes de E tels que $f^2 = g^2 = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

1. Montrer que la dimension de E est paire.

2. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{E}$ de E t.q.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. ●◐○

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe X et Y dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M = XY^T$.

2. Prouver que toute matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1, et donc qu'il existe $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r$ $2r$ matrices de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = \sum_{i=1}^{r} X_i Y_i^T$.

3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de df et $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Montrer que $f^2 = \mathrm{tr}(f) f$.

4. À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 6 (Endomorphismes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)**.** ●●○

1. Déterminer la trace de l'application de transposition sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = MA$. Déterminer $\mathrm{tr}(\varphi)$.

Stratégie/exercices conseillés. En sus des exercices faits en cours, il faut à mon avis :

- parler de base adaptée (11 ou 14),
- faire un exercice avec une application linéaire sur les polynômes (8),
- faire un exercice un peu fin de changement de base (16),
- étudier au moins une fois un commutateur ($AB - BA$) : exercice 21.

Si vous avez du mal, concentrez-vous sur les exercices 13 et 7.

2 Matrice d'une application linéaire dans une base

Exercice 7. ●◐○ Déterminer dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ la matrice de l'endomorphisme $f : P \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Déterminer le noyau et l'image de cette application linéaire.

Exercice 8. ●○○ Soit $f_\alpha : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ \quad P \mapsto (1+X)P' - \alpha P \end{array} \right.$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f_\alpha \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (1, 1+X, (1+X)^2, \ldots, (1+X)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer la matrice A_α de f_α dans la base précédente.
4. À quelle condition sur α l'endomorphisme f_α est-il inversible ?

Exercice 9. ●●○ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions f_1 et f_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \mathrm{e}^{-x},\ f_2(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E.
3. Écrire la matrice représentative A de φ dans la base $\mathscr{B} = (f_1, f_2)$ de E.
4. Calculer A^n pour tout entier naturel n.
5. Soit $f : x \mapsto (3x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Calculer $f^{(n)}$ pour tout entier naturel n.
6. Montrer que tout élément f de E admet une unique primitive F élément de E et que $\psi : f \mapsto F$ est un endomorphisme de E.
7. **(i)** Déterminer la matrice B de ψ dans la base $\mathscr{B}$.
   (ii) Quel lien y a-t-il entre A et B ?

Exercice 10. ●◐○ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 11. ●●○ Soit u un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-evdf. Représenter $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(u)$ dans une base $\mathscr{E}$ qui fasse apparaître le plus de zéros possible, lorsque...

1. $u^2 = 0$.
2. $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$.
3. $\mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.
4. $\ker(u)$ est un hyperplan de E.

Exercice 12. ●●○

1. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ tel que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\, u$.
   En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.
2. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^{3n}\right)$ tel que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2n$. Montrer que $\mathrm{Ker}\ u = \mathrm{Im}\, u^2$.
   En déduire que u peut être représentée par $\begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$.

3 Matrices de passage – matrices semblables et équivalentes

Exercice 13. ●○○ Dans cet exercice on notera $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y, z) = (2x - 2y + 2z, -x + y - 2z, -2x + 2y - 3z)$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathscr{B}$ au départ et à l'arrivée.
2. Donner une base du noyau de f.
3. Donner une équation de l'image de f.
4. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_2 + e_3$ et $u_3 = -2e_1 + e_3$.
   (i) Montrer que $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (ii) Quelle est la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$?
5. (i) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$, et $f(u_3)$ en fonction de u_1, u_2, u_3.
   (ii) Quelle est la matrice $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ de f dans la base B' ?
6. Calculer P^{-1}.

Exercice 14. ●○○

1. Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.
2. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante telle que : $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$. Montrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 15. ●◐○ Soit E un espace vectoriel de dimension n. On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E ?
2. En déduire que pour tout $i, j \in \{1, \dots n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.

Exercice 16. ●●◐

1. (question de quasi-cours) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que A est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 17. ●●○ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, avec $\dim E = 3$, tel que $f^2 = 2f - \mathrm{Id}$, $f \neq \mathrm{Id}$.

1. Montrer que f est inversible et calculer f^{-1}.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) \subset \ker(f - \mathrm{Id})$.
3. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Calculer A^n.

Exercice 18. ●●◐ Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante égalle à 0, non constante égale à 1 telle que pour toutes A et B, $f(AB) = f(A)f(B)$.

1. Déterminer $f(\mathrm{I}_n)$ et $f(0)$.
2. Démontrer que si A est inversible, $f(A) \neq 0$.
3. Démontrer que si A n'est pas inversible, $f(A) = 0$.

4 Autres exercices

Exercice 19. ●○○ Soit φ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$. Montrer que $\varphi = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})),\mathbb{K}}$.

Exercice 20. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation

$$X + {}^{\mathrm{t}}X = \mathrm{tr}(X)A$$

d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (Sur l'application $AB - BA$)**.** ●●◐ On considère l'application Ψ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\Psi(A, B) = AB - BA.$$

1. I_n est-elle dans l'image de Ψ ?

2. Soit A tel qu'il existe B vérifiant $\Psi(A, B) = A$. Calculer $\mathrm{tr}(A^p)$ pour tout entier p.
3. Déterminer l'image de Ψ.

Exercice 22. ●●◐

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer tous les endormorphismes de E tels que pour tout vecteur x la famille $(x, f(x))$ est liée. En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$Z(\mathcal{L}(E)) = \{g \in \mathcal{L}(E); \forall f \in \mathcal{L}(E) \quad fg = gf\}$$

2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A vérifiant $AM = MA$ pour toute matrice M.
3. Montrer que $T_{ij} = I_n + E_{ij}$ est inversible. En déduire que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.
4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ ayant même matrice dans toutes les bases de E. Identifier f.
5. Quel est le centre de $GL_n(\mathbb{K})$?

Exercice 23 (X MP 2014). ●●◐ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est idempotente si $A^2 = A$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ idempotente. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rg}(A)$.
2. Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{R})$ de cardinal p. Soit $A = \displaystyle\sum_{M \in G} M$
   - **(a)** Vérifier que $\dfrac{A}{p}$ est idempotente.
   - **(b)** On suppose que $\mathrm{tr}(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
   - **(c)** Montrer que $\mathrm{tr}(A)$ est un entier divisible par p.
3. Soit $F = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall M \in G, Mx = x\}$.
   - **(i)** Montrer que F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension égale à $\mathrm{tr}(A)/p$.
   - **(ii)** Pour $p \in N^*$, expliciter un sous-groupe G de $GL_2(\mathbb{R})$ de cardinal p.

Indications.

1
1. Partir de x_0 tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$ et partir d'une relation de liaison entre $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$, à laquelle on applique suffisamment de fois f.
2. Utiliser ou bien des produits matriciels, ou bien calculer $f^k(f^i(x_0))$.
3. Utiliser le fait que $(x_0, \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E. On peut , si $g \in \mathscr{L}(E)$ commute avec f, s'intéresser à déterminer la forme de la matrice de g dans cette base.

2
1. Remarquer qu'une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente.
2. Montrer d'abord des inclusions, puis des égalités (utiliser le théorème du rang).
3. Utiliser que $\mathbb{C}_1[X] = \ker(\Delta^2)$.
4. Prendre $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
5. Utiliser $v : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C}_1[X] \to \mathbb{C}_1[X] \\ x \mapsto v(x) \end{array} \right.$.

3 Utiliser le fait que A et B sont des matrices de symétries, donc sont semblables à des matrices bien connues !

5
1. Utiliser le fait que M est équivalente à $J_{n,n,1}$, ou le fait que toutes les colonnes de M sont proportionnelles.
2. Utiliser l'équivalence à $J_{n,n,r}$.
3. Utiliser l'écriture matricielle !
4. Utiliser le fait qu'on doit avoir $f^2 = f$.

6
1. Déterminer la matrice de l'application dans la base canonique ou dans une base adaptée à la décomposition $\mathscr{S}_n \oplus \mathscr{A}_n$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique, bien ordonnée, i.e. dans $(E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots$

11 Utiliser des bases adaptées ! Partir par exemple d'une base du noyau, que l'on complète en une base de E. Ou, si on a $F \subset G \subset E$, partir d'une base de F, complétée en une base de G, complétée en une base de E.

10 Partir de $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $f^2(x) \neq 0$ et montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de E.

7 Penser à utiliser la définition de l'écriture d'une matrice dans une base. Ensuite, pas nécessaire d'utiliser la matrice pour déterminer le noyau et l'image !

8
1. Ne pas oublier les deux parties du mot **endo**-**morphisme**.
2. Remarquer qu'il s'agit d'une famille de polynômes à degrés échelonnés.
3. On doit normalement trouver une famille diagonale.
4. Penser au fait qu'une matrice diagonale est inversible ssi ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

9
1. Démontrer que (f_1, f_2) est libre.
2. Vérifier que $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ sont toujours dans E.
3. Normalement les images de f_1 et f_2 par φ ont déjà été calculées.

4. Calculer A^2, A^3 et faire une récurrence immédiate.
5. Utiliser la représentation matricielle.
6. Toute la difficulté réside dans la détermination de la constante de primitivation ! Elle doit notamment aboutir à une application linéaire.
7. **(i)** Normalement les calculs ont déjà été faits !
   (ii)

13 1. Essayer de ne faire aucun calcul et utiliser l'expression de f.
2. Résoudre un système homogène.
3. Résoudre un système inhomogène.
4. **(i)** Inverer la matrice de $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ dans la base canonique.
   (ii) Si vous avez suivi les indications, c'est la matrice que vous venez d'inverser !
5. **(i)**
   (ii) Utiliser la question précédente !
6. Elle a déjà été calculée à la question (i).

15 1. C'est du cours !
2. Faire un simple calcul.
3. Démontrer qu'on a trouvé ainsi une famille libre, donc une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et traduire ceci à l'aide de l'isomorphismes entre les applications linéaires et les matrices d'applications linéaires.

16 1. Revoir le dernier exo du premier chapitre d'algèbre linéaire.
2. Faire une récurrence ! En utilisant x tel que $(x, f(x))$ est libre, compléter cette famille en une base, et écrire la matrice de f dans cette base complétée. Elle doit commencer par un 0 en haut à gauche.

14 1. Utiliser le fait que deux matrices sont équivalentes **si et seulement si** elles ont même rang.
2. Montrer d'abord que $\varphi(A)$ est non nulle si A est inversible. Puis utiliser la question précédente.

17 1. Écrire $f \circ ($ une expression en $f) = \mathrm{Id}$.
2. Déclarer proprement ses variables.
3. Montrer que $f - \mathrm{Id}$ est de rang 1, compléter $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ en une base de $\ker(f - \mathrm{Id})$.
4. Calculer A^2 puis faire une récurrence immédiate.

18 1. Élémentaire.
2. Idem.
3. Montrer que A est équivalente à une matrice nilpotente.

20 Raisonner par analyse-synthèse, prendre la trace et distinguer selon les valeurs de $\mathrm{tr}(A)$.

21 1. Non !
2. Utiliser que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
3. Utiliser qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

?? Prendre un élément du noyau et supposer par l'absurde qu'il est non nul. Prendre alors sa coordonnée de plus grand module.

22 1. On l'a déjà fait en classe !
2. On l'a déjà fait en TD !
3. Engendrer les E_{ij} avec les T_{ij}
4. Montrer que f est une homothétie.
5. Attention, toutes les homothéties ne sont pas inversibles.

23 1. C'est du cours !
2. **(a)** Utiliser que $M \mapsto NM$ est une bijection (encore !)
   (b) Utiliser le fait que la trace d'un projecteur est son rang.
   (c) Idem.
3. **(i)** Utiliser le fait que A est un projecteur.
   (ii) S'intéresser aux matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.