TD22
INTÉGRATION

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ●◐○ Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, n dans $\mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \int_0^1 t^k f(t)dt = 0.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)f(t)dt = 0$.

2. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0,1]$.

Exercice 2 (Autour de la valeur moyenne d'une fonction)**.** ●●○ Si $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on définit sa valeur moyenne comme

$$\mathrm{VM}_{[a,b]}(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

1. (premier théorème de la moyenne) Soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \mathrm{VM}_{[a,b]}f$.

2. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $[0,1]$.

3. (second théorème de la moyenne) Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, avec g positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe c dans $[a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt.$$

Retrouver à l'aide de ce résultat le premier théorème de la moyenne.

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)dt \text{ et } v_n = \int_0^1 f(t^n)dt.$$

1. Déterminer les limites de (u_n) et (v_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Lorsque f est $\mathscr{C}^1$ et $f(1) \neq 0$, déterminer un équivalent de (v_n).

Exercice 4. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ à l'ordre 2, montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2M_0}{h} + h\dfrac{M_2}{2}$.

2. En déduire que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 5. ●○○ Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, des suites définies par

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha n + \beta k}$ (avec $\alpha > 0, \beta > 0$)

2. $v_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

2 Construction de l'intégrale – approximation

Exercice 6. ●◐○

1. Démontrer qu'une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

2. Montrer que la fonction racine carrée est u.c. mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7. ●●○ Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue vérifiant

$\forall x > 0, f(nx) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que f converge vers 0 en $+\infty$.

Exercice 8 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** ●●● Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, continue par morceaux. Démontrer que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b \mathrm{e}^{i\lambda t} f(t)dt \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On commencera par démontrer le résultat pour des fonctions en escalier, puis on utilisera le résultat de densité des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

3 Calculs d'intégrales

Exercice 9. ●○○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$

2. $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x+\sin(x)}dx$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan(4x)dx$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}$

Exercice 10. ●●○ Calculer les intégrales suivantes :

1. $J_1 = \displaystyle\int_{2a}^{3a} \frac{t^3}{t^2-a^2}dt$ ($a>0$)

2. $J_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^4(x)}{\sin^6(x)}dx$

3. $J_3 = \displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x}\ln(x)dx$

4. $J_4 = \displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$ (poser $x=\sin^2(t)$).

5. $J_5 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}dx$

6. $J_6 = \displaystyle\int_0^1 e^{\mathrm{Arcsin}(x)}dx$

Exercice 11. ●●○ Soit $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_\alpha^\beta f^{-1}(t)dt = b\beta - a\alpha$.

4 Suites et intégrales (sommes de Riemann & Cie)

Exercice 12. ●●○

1. Déterminer les limites suivantes (quand n tend vers $+\infty$)

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$,

(c) $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}$.

2. Soit $p>0$. Déterminer un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

Exercice 13. ●◐○ Soit, pour $n \geqslant 0$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^n dx$.

1. Étudier la monotonie de (u_n).

2. En calculant $u_{n+2}+u_n$, déterminer la limite ℓ de u_n.

3. Donner un équivalent simple de $u_n - \ell$.

Exercice 14. ●●◐ Soit $f : [a,b+1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par

$$u_n = n\int_a^b \left(f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)\right)dx.$$

5 Intégrales fonctions des bornes

Exercice 15. ●○○ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 16. ●○○ Soit $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \varphi(x)$.

3. Montrer que l'on peut prolonger φ par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement.

4. Démontrer que $\dfrac{\varphi(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

5. Déterminer la limite de φ en $-\infty$.

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ de φ.

Exercice 17. ●●○ Soit $k \in]0,1[$. On définit

$$F : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 - k\sin^2(t)}dt.$$

1. Déterminer le domaine D de définition de F et montrer que F est impaire.

On pose $a = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Calculer $F(\pi)$ en fonction de a.

3. Montrer que F est dérivable et strictement monotone sur D.

4. **(i)** Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ F(x + n\pi) = F(x) + 2na$.

(ii) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

6 Exercices plus théoriques sur l'intégrale

Exercice 18. ●◐○ Montrer que pour tout x dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

Exercice 19. ●●○ Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que $|f|$ est bornée par un réel M_0 et $|f''|$ est bornée par un réel M_2. Démontrer que $|f'|$ est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$ (**attention !** ça n'est pas tout à fait l'exercice corrigé en cours !)

Exercice 20. ●●○

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\sin(nx)dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ tendent vers 0 quand n tend $+\infty$.

2. Déterminer deux réels α et β tels que $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

3. Retrouver ainsi la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 21. ●●○ Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = 0$, alors il existe $a \in]0,\pi[$ tel que f s'annule en a.

2. Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = \int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = 0$, alors f s'annule 2 fois sur $]0,\pi[$.
(indice : on pourra regarder $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t-a)dt$).

Exercice 22. ●●◐ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathscr{C}_{\text{pm}}$. Montrer que

$$\sqrt{1 + \mathrm{VM}_{[0,1]}(f)^2} \leqslant \int_{[0,1]} \sqrt{1 + f^2} \leqslant \sqrt{1 + \mathrm{VM}_{[0,1]}(f^2)}$$

Exercice 23. ●●○ Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$, concave.

1. Montrer que

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

2. Montrer que les inégalités persistent en supposant f seulement continue (on utilisera des sommes de Riemann).

Exercice 24 (Inégalité de Poincaré)**.** ●●◐ Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 25. ●●● Si $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, si $p \in \mathbb{N}^*$, on définit la norme L^p de f comme

$$\|f\|_{L^p} = \sqrt[p]{\int_0^1 |f(t)|^p dt}.$$

1. Démontrer que $\|f\|_{L^p}$ est une norme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

2. Démontrer que $\|f\|_{L^p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{\infty,[0,1]}$.

Indications

1 **1.** Utiliser la linéarité.
2. Raisonner par l'absurde et construire un bon polynôme.

2 **1.** Utiliser le TVI avec f et $\mathrm{VM}_{[a,b]}(f)$
2. Poser $g : t \mapsto f(t) - t$ et calculer l'intégrale de g sur $[0,1]$.
3. Utiliser le TVI avec f pour la valeur $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{\int_a^b g(t)}$.

3 **1.** Pour (v_n), prendre un $\varepsilon > 0$, écrire que $\displaystyle\int_0^1 = \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^1$.
2. Faire une IPP !

4 **1.** Utiliser convenablement l'inégalité triangulaire.
2. Prendre h qui minimise le majorant trouvé.

5 Dans cet exercice, sortir un $\dfrac{1}{n}$ et faire apparaître une somme de Riemann. S'il y a un prodit, en prendre le $\ln$.

6 **1.** Cours !
2. Démontrer l'uniforme continuité proprement en déclarant les variables, et faire par l'absurde pour le caractère lipschitzien.

7 Déclarer ε, η d'uniforme continuité lié à ε et N tel que $\forall n \geqslant N$, $|f(n\eta)| \leqslant \varepsilon$. Prendre $M = N\eta$ et $x \geqslant M$...

8 Démontrer d'abord le résultat pour les fonctions en escalier (c'est facile), puis approcher une fonction cpm par une fonction en escalier.

9 **1.** Intégration directe.
2. Linéariser le cosinus.
3. Utiliser que $\tan = \sin / \cos$ et reconnaître (presque) u'/u.
4. Ou bien faire un changement de variables $u = \mathrm{e}^x$, ou reconnaître une intégration directe (coup du e^x en haut).

10 **(i)** Effectuer une décomposition en éléments simples.
(ii) Faire apparaître $u^n u'$ avec $u = \tan$!
(iii) Faire une IPP, en posant $u'(x) = x^{\frac{3}{2}}$, et $v(x) = \ln(x)$.
(iv) Poser, comme indiqué, $t = \operatorname{Arcsin}(\sqrt{x})$.
(v) Poser $u = x - 1$.
(vi) Poser $u = \operatorname{Arcsin}(x)$.

12 **1.** Utiliser les techniques vues en cours : sortir un $\dfrac{1}{n}$, prendre le $\ln$ pour la troisième limite.
2. Mutliplier et diviser par $n^p \times n$, et faire apparaître une somme de Riemann.

13 **1.** Utiliser le fait que $|\tan(t)| < 1$.
2. Penser à **d'abord** démontrer que (u_n) converge.
3. Utiliser la décroissance de u_n et le calcul de $u_n + u_{n+2}$.

14 Utiliser une primitive de f et faire apparaître un taux de variation.

15 Utiliser la définition d'une dérivée avec le taux d'accroissement.

16 **1.** Utiliser des primitives.
2. Encadrer l'intégrale : encadrer l'un des deux termes parmi e^t ou $\dfrac{1}{t}$, et intégrer ce qui reste.
3. Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.
4. Minorer e^t par e^x.
5.

17 **1.** Faire un changement de variables.
2. Séparer l'intégrale en deux et poser $s = t - \pi$.
3. Utiliser la définition d'une primitive.
4. **(i)** Écrire $\displaystyle\int_0^{x+n\pi} = \int_0^{n\pi} + \int_{n\pi}^{x+n\pi}$
(ii) Utiliser le théorème de la limite monotone.

18 Utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale !

19 Ici, ne pas utiliser une mais **deux** inégalités de Taylor-Lagrange : entre x et $x+h$, **puis** entre $x-h$ et x.

20 **1.** Faire une intégration par parties, et majorer proprement chaque terme.
2. On doit trouver $\alpha = -1$ et $\beta = \dfrac{1}{2\pi}$.
3. Utiliser que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \sum_{n=1}^{N} \cos(nt)dt$, recalculer la somme des $\cos(nt)$.
Penser aussi au fait que $\cos(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}(\sin(b+a) + \sin(b-a))$.

21 **1.** Supposer que f ne s'annule pas et aboutir à une contradiction.
2. Utiliser que f s'annule en un réel a et considérer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(t-a)dt$.

22 L'inégalité de droite est évidente. Pour l'inégalité de gauche, penser à considérer les quantités $\sqrt{1+f^2} - f$ et $\sqrt{1+f^2} + f$.

23 Pour la première question, utiliser le fait que la courbe de f est au-dessus d'une certaine corde et sous une certaine tangente.

24 Écrire l'expression de $f(x)$ en fonction de f' et appliquer directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

25
- déjà commencer par montrer que l'on peut se ramener à f positive, non identiquement nulle, de maximum égal à 1.
- ensuite, montrer que dans le cas ci-dessus, $\sqrt[p]{\displaystyle\int_0^1 f(t)^p dt} \leqslant 1$ et que pour tout ε, $\sqrt[p]{\displaystyle\int_0^1 g(t)^p dt} \geqslant 1 - \varepsilon$ àpcr.