

FIN ↘

TD24

SÉRIES, FAMILLES SOMMABLES

(avec corrigé)

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants ($a > 0$)

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\frac{3n + 2n^2}{n^{5/3} + 3n}$ | 3. $\frac{\text{Arctan}(n)}{n}$ | 5. $\frac{n!}{n^n} e^n$ |
| 2. $(n+1)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}$ | 4. $\frac{\text{Arctan}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ | 6. $\text{Arctan}(n+a) - \text{Arctan}(n)$. |

Exercice 2. Déterminer la convergence des séries de termes généraux suivants

1. $\frac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}$

Ici, pas besoin du critère des séries alternées ! Si n est dans $\mathbb{N}$,

$$\left| \frac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4} \right| \leq \frac{3n + 1}{n^4} \sim \frac{3}{n^3},$$

donc $\frac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4} = O(1/n^3)$. Comme $\sum \frac{1}{n^3}$ converge (série de Riemann), on en déduit, par comparaison à une série à termes positifs, que $\sum \frac{(-1)^n n + 2n + 1}{n^4}$ converge.

2. $\frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln(n)}$

Ici, c'est un pseudo-piège. Il suffit de penser que $\cos(n^2 \pi) = (-1)^{n^2}$, égal à 1 si n est pair et -1 si n est impair. Donc $\frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln(n)} = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$. Comme la suite $\left(\frac{1}{n \ln(n)} \right)_{n \geq 2}$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\sum \frac{\cos(n^2 \pi)}{n \ln(n)}$ converge par le critère des séries alternées.

3. $\frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$

Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$ $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}}$. Alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(-1)^n}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + a_n, \end{aligned}$$

où $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$, terme général d'une série de Riemann divergente, de signe constant. Comme $\sum a_n$ diverge et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (critère des séries alternées), $\sum u_n$ diverge.

Exercice 3. ●○○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

1. Démontrer que si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. Démontrer que si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
3. Trouver deux situations où $\ell = 1$, l'une où $\sum u_n$ converge, l'autre où $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4. Démontrer la convergence et calculer les sommes des séries de terme général...

1. $\frac{n}{2^n}$

2. $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$

Le deuxième terme $\frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$ est équivalent à $\frac{1}{n^3}$, donc est le terme général d'une série convergente.

Pour calculer la somme, on remarque que

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= (n^2)^2 + n^2 + 1 \\ &= (n^2 - j)(n^2 - j^2) \\ &= (n - e^{\frac{j\pi}{3}})(n + e^{\frac{j\pi}{3}})(n - e^{\frac{-j\pi}{3}})(n + e^{\frac{-j\pi}{3}}). \end{aligned}$$

On peut dès lors faire une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$. Mais **ATTENTION**, si on fait ça, on se retrouvera à faire des $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha}{n - e^{\frac{j\pi}{3}}}$, qui ne converge pas !

On va plutôt regrouper nos facteurs pour factoriser le polynôme sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} n^4 + n^2 + 1 &= (n - e^{\frac{j\pi}{3}})(n + e^{\frac{j\pi}{3}})(n - e^{\frac{-j\pi}{3}})(n + e^{\frac{-j\pi}{3}}) \\ &= (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

Ainsi, on remarque assez facilement que

$$\frac{n}{n^4 + n^2 + 1} = \frac{1}{2(n^2 - n + 1)} - \frac{1}{2(n^2 + n + 1)} = u_{n-1} - u_n,$$

où $u_n = \frac{1}{2(n^2 + n + 1)}$. Donc, comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\sum_{k=1}^n u_{k-1} - u_k = u_0 - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_0 = \frac{1}{2}$. Donc la somme vaut $\frac{1}{2}$.

Exercice 5 (Règle de Raabe-Duhamel). ●●○ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tels qu'il existe $\alpha > 1$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Soit $1 < \beta < \alpha$. Posons $v_n = n^{-\beta}$. À l'aide d'un d.l. à l'ordre 1, démontrer qu'à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

On écrit $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^{-\beta}}{n^{-\beta}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 On remarque que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\beta - \alpha}{n}$,
 avec $\beta - \alpha < 0$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ est négatif à pcr, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ à pcr.

2. Conclure que la série de terme général (u_n) converge.

Soit N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors par une récurrence immédiate, il vient, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N},$$

donc $u_n = O(v_n)$, donc $\sum u_n$ converge.

3. Trouver un contre-exemple dans le cas où $\alpha = 1$.

Si $\alpha = 1$, il suffit de prendre $u_n = \frac{1}{n-1}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n}$ mais $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6. Soit (u_n) une suite de réels.

1. On suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

On va procéder par double implication :

- si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.
- si $\sum v_n$ converge, on a, comme $v_n \neq 1$ (cela impliquerait que $u_n = 1 + u_n$), $u_n = \frac{v_n}{1-v_n} \sim v_n$, donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

D'où l'équivalence.

2. On ne suppose plus que (u_n) est à termes positifs mais que $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Ici, on suppose que $\sum u_n$ converge, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $v_n \sim u_n$, **MAIS** u_n n'est pas nécessairement de signe constant ! Il faut donc aller plus loin dans le développement limité !

$$v_n - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = -\frac{u_n^2}{1+u_n} \sim -u_n^2,$$

série convergente **de terme général de signe constant** ! Donc $v_n = u_n + w_n$ où $\sum u_n$ converge et $\sum w_n$ converge absolument, donc $\sum v_n$ converge.

Exercice 7. Pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ a-t-on $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$?

Exercice 8 (Un exemple de famille non sommable). On pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

- Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.
- Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

2 Exercices pratiques

Exercice 9 (Termes généraux divers et variés). $\bullet \circ \circ \circ - \bullet \bullet \circ$ Dire si les séries suivantes sont convergentes ou pas

1. $\sum \frac{1}{n^{\sqrt{n}}}$

2. $\sum e^{-\sqrt{n}}$

3. $\sum \frac{n}{2^n + n}$

4. $\sum \frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})}$

5. $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$

6. $\sum \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$

7. $\sum \frac{n!^2}{(2n)!}$

8. $\sum \frac{1}{\ln(n)^n}$

9. $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

10. $\sum e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$

11. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx$

12. $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha > 0)$

13. $\sum \cos^n \frac{1}{n^\alpha} \ (\alpha > 0)$

14. $\sum \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$

15. $\sum \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^n}$

1. On remarque que $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ par croissances comparées. Donc $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc par comparaison des séries à termes positifs, la série considérée est divergente.

2. $n^2 e^{-\sqrt{n}} = (\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $e^{-\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc, par comparaison au terme général d'une série de Riemann convergente, $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.

3. $\frac{n}{2^n + n} \sim \frac{n}{2^n}$. Or, $n^2 \frac{n}{2^n} = \frac{n^3}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $\sum \frac{n}{2^n + n}$ converge.

Remarque : on aurait pu utiliser un critère de D'Alembert, mais de fait il n'était pas nécessaire.

4. $\frac{1}{(n^2 + 1) \sin(1/\sqrt{n})} \sim \frac{1}{n^2 \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente.

5. $n^2 \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n} = \frac{n^5 \ln(2n)}{3^n} = o\left(\frac{n^6}{3^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Donc $\frac{n^3 \ln(2n)}{3^n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et la série $\sum \frac{n^3 \ln(2n)}{3^n}$ est à termes positifs, donc elle est convergente.

6. On détermine un équivalent du terme général $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{-n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-n + \frac{1}{2} + o(1)} \sim \sqrt{e} e^{-n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série convergente (géométrique). Donc, comme u_n est à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

7. Posons $v_n = \frac{n!^2}{(2n)!}$. Là, une règle de D'Alembert s'impose !

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!} \frac{(2n)!}{n!^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{1}{4} < 1,$$

donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum v_n$ converge.

8. Posons $a_n = \frac{1}{\ln(n)^n}$. Pour $n \geq 3$, $\ln(n) \geq \ln(3)$ donc $a_n \leq \frac{1}{\ln(3)^n}$, terme général d'une série géométrique convergente. Donc $\sum a_n$ converge.
9. Posons $b_n = \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$. Alors $b_n = e^{-\ln(n) \ln(\ln(n))} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$. Or, pour $n \geq e^3$, $\ln(\ln(n)) \geq \ln(3) > 1$, donc $b_n \leq \frac{1}{n^{\ln(3)}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum b_n$ converge.
10. Posons $c_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Alors

$$\begin{aligned} e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e - e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \\ &= e - e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e - e^{1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{2n}, \end{aligned}$$

terme général d'une série positive divergente, donc $\sum c_n$ diverge.

11. On sait que pour tout x dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$. Donc $\frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{2}{\pi}$, donc $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sin(x)}{x} dx \geq \frac{2}{\pi n}$, terme général d'une série divergente. Donc la série diverge.
12. Si $\alpha > 0$, $\cos \frac{1}{n^\alpha} \sim 1$, donc $\sum \cos \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
13. Si $\alpha > 0$,

$$\cos^n \frac{1}{n^\alpha} = e^{n \ln(\cos \frac{1}{n^\alpha})}.$$

Or,

$$n \ln \left(\cos \frac{1}{n^\alpha} \right) = n \ln \left(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right) \right) = -n^{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha}).$$

Ainsi, $\cos^n \frac{1}{n^\alpha} = \exp \left(-n^{1-2\alpha} + O(n^{1-3\alpha}) \right)$. Donc, comme $\alpha > 0$, $\cos^n \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{1}$, donc la série diverge. En revanche elle convergerait si on avait $\alpha < 0$, et divergerait si $\alpha = 0$.

14. Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$ $d_n = \sqrt{\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}$. Alors

$$\tan \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{2n^3},$$

donc $d_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}n^{\frac{3}{2}}}$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum d_n$ converge.

15. Si $t \leq \frac{1}{n}$, alors $t^n \leq \frac{1}{n^n}$, donc $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{1}{1+\frac{1}{n^{2n}}} = \frac{n^{2n}}{n^{2n}+1}$, donc $\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dt}{1+t^2} \geq \frac{1}{n} \frac{n^{2n}}{n^{2n}+1} \sim \frac{1}{n}$, donc la série diverge.

Exercice 10 (Termes généraux originaux). ●●● Déterminer la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{1}{nc(n)^\beta}$ où $c(n)$ est le nombre de chiffres en base 10 de n .

On sait que si n s'écrit avec $c(n)$ chiffres en base 10, alors $10^{c(n)-1} \leq n < 10^{c(n)}$, autrement dit $c(n) - 1 \leq \log_{10}(n) < c(n)$, i.e. $c(n) \leq \log_{10}(n) + 1 < c(n) + 1$, donc $c(n) = \lfloor \log_{10}(n) + 1 \rfloor$.

On peut maintenant trouver un équivalent de $c(n)$ en encadrant la partie entière ! On sait que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, donc, ici $\log_{10}(n) < c(n) \leq \log_{10}(n) + 1 \sim_{n \rightarrow +\infty} \log_{10}(n)$, donc $c(n) \sim_{n \rightarrow +\infty} \log_{10}(n)$, donc $\frac{1}{nc(n)} \sim \frac{1}{n \log_{10}(n)} = \frac{\ln(10)}{n \ln(n)}$, terme général d'une série divergente par l'exercice vu en cours sur les séries de Bertrand.

2. $\sum \frac{1}{k_n}$ où k_n est le n -ième entier qui s'écrit sans 9.

Comptons le nombre d'entiers à k chiffres qui s'écrivent sans 9 : il y en a $8 \times 9^{k-1}$, le 8 correspondant au choix de la première décimale, nécessairement non nulle, et le reste à des choix de chiffres parmi $\llbracket 0, 8 \rrbracket$. Donc, si $n \in \mathbb{N}$, si k_n est le n -ième nombre sans 9 et $c(k_n)$ son nombre de chiffres, il y a au maximum $8 \times 9^{c(k_n)-1}$ chiffres qui s'écrivent sans 9 et qui ont le même nombre de chiffres que k_n . Donc, comme k_n s'écrit sans 9, c'est au plus le $8 \times 9^{c(k_n)-1}$ -ème chiffre s'écrivant

sans 9, i.e. $n \leq 8 \times 9^{c(k_n)-1} \leq 8 \times 9^{\log_{10}(n)} = 8n^{\frac{\ln(10)}{\ln(9)}}$, i.e.

$$\frac{1}{k_n} \leq \frac{1}{8n^{\frac{\ln(10)}{\ln(9)}}},$$

avec $n^{\frac{\ln(10)}{\ln(9)}} > 1$, donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum \frac{1}{k_n}$ converge.

Exercice 11. ●●○ Déterminer la convergence et calculer la somme de la série de terme général

$$u_n = \frac{n}{7^n}.$$

La convergence est évidente car $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{7n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{7}$, terme général d'une série convergente par le critère de D'Alembert.

Pour le calcul de cette somme, deux méthodes possibles.

Première méthode, par manipulation de sommes. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \frac{n}{7^n} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^n \frac{1}{7^n} = \sum_{k=1}^N \sum_{n=k}^N \frac{1}{7^n} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{7^k} \frac{1 - \frac{1}{7^{N-k+1}}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{7}{6} \sum_{k=1}^N \frac{1}{7^k} - \frac{7}{6} \sum_{k=1}^N \frac{1}{7^{N+1}} \\ &= \frac{7}{6} \frac{1 - \frac{1}{7^N}}{1 - \frac{1}{7}} - \frac{7}{6} N \frac{1}{7^{N+1}} \\ &= \frac{7}{36} \left(1 - \frac{1}{7^N} \right) - \frac{7}{6} N \frac{1}{7^{N+1}} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

Deuxième méthode, par dérivation de fonction. Posons, pour tout x dans $] -1, 1[$ et tout N dans $\mathbb{N}$,

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}.$$

Alors $f'_N(x) = \sum_{n=1}^N nx^{n-1}$ d'une part, mais on a aussi

$$\begin{aligned} f'_N(x) &= \frac{-(N+1)x^N(1-x) + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(N+1)x^N + (N+1)x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 - (N+1)x^N + Nx^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=1}^N nx^n = xf'_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1-x)^2}$. Ici, $x = \frac{1}{7}$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{7^n} = \frac{\frac{1}{7}}{\left(1 - \frac{1}{7}\right)^2} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{36}{49}} = \frac{7}{36}.$$

D'où le résultat !

Exercice 12 (Lien entre suites et séries). ●○○ Montrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1.} & w_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} & \mathbf{2.} & u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), & \mathbf{3.} & v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \end{array}$$

Le but de cet exercice est de reconnaître des termes généraux de séries comme des différences de deux termes de suites, afin de reconnaître une somme télescopique.

(i) On remarque que

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = a_{n+1} - a_n,$$

où $a_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$. Alors si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=1}^N a_{n+1} - a_n = a_{N+1} - a_2 = \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \ln(2) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\ln(2).$$

(ii) On remarque que

$$v_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \frac{1}{n(n+1)} = b_{n+1} - b_n,$$

où $b_n = -\frac{1}{2n(n+1)}$. Alors si $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N v_n = \sum_{n=0}^N b_{n+1} - b_n = b_{N+1} - b_0 = -\frac{1}{2(N+1)(N+2)} + \frac{1}{2} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

(iii) Enfin, en posant $c_n = n^{\frac{1}{n}}$, on obtient, pour tout $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^N w_n = c_{N+1} - 1$. Déterminons la convergence ou non de c_n . On remarque que $c_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1$. Donc $\sum w_n$ converge et $\sum_{n \geq 0} w_n = 0$.

Exercice 13 (Séries absolument convergentes et alternées). ●●○○ –●●○

Discuter de la convergence des séries suivantes.

1. $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$

4. $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$

6. $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$

2. $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)}$

7. $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

3. $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$

5. $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

8. $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$

1. On remarque que $\left| \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2} \right| = \frac{\ln(n)}{n^2}$, et que $n^{3/2} \frac{\ln(n)}{n^2} = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, terme général d'une série de Riemann convergente. Donc $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$ converge absolument, donc $\sum \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$ converge.

2. De même, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)} \right| = \frac{1}{n^2 + \sin(n^2)} \leq \frac{1}{n^2 - 1} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente, donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)}$ converge absolument, donc converge.
3. Ici, on applique un critère des séries alternées : $\left(\frac{1}{\ln(n+2)}\right)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0, donc par le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n+2)}$ est le terme général d'une série convergente.
4. Si $\alpha = \beta = 0$, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \sum (-1)^n$ ne converge pas (divergence grossière).
 Si $\alpha, \beta \geq 0$, non tous deux nuls, $\left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}\right)_{n \geq 0}$ est une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0, donc par le critère des séries alternées, $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.
 Si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$, on écrit que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. Elle est décroissante : si l'on étudie la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha \ln(t)^\beta} = t^{-\alpha} \ln(t)^{-\beta}$, alors

$$f'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} \ln(t)^{-\beta} - \beta t^{-\alpha} \ln(t)^{-\beta-1} \frac{1}{t} = \frac{1}{t^{\alpha+1} \ln(t)^{\beta+1}} (-\alpha \ln(t) - \beta) < 0,$$

donc f est décroissante, donc $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est une suite de réels positifs, décroissante et tendant vers 0, donc, d'après le critère des séries alternées, $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ converge.

Si $\alpha < 0$, alors $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ diverge grossièrement.

5. ATTENTION : ON NE PEUT PAS FAIRE D'ÉQUIVALENT CAR LES SÉRIES NE SONT PAS À TERMES POSITIFS. On peut en revanche faire un dl. On écrit

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + v_n,$$

où $v_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées (je ne le rerédige pas ici), et $\sum v_n$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann. Donc $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

6. On écrit

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + w_n,$$

où $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées (je ne le rerédige pas ici), et $\sum w_n$ converge absolument par comparaison avec une série de Riemann. Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n-1}}$ converge.

7. On écrit

$$\begin{aligned} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) &= \sin\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\right) \\ &= \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) \\ &= \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

somme du terme général d'une série convergente car alternée et d'une série absolument convergente par le critère de Riemann.

8. Posons pour tout n $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On remarque que sur l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin$ est du signe de $(-1)^n$, donc u_n est du signe de $(-1)^n$. Ensuite, on montre que $|u_n|$ est décroissante et tend vers 0.

Limite. On remarque que $|u_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x} dx \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Décroissance. Si $n \in \mathbb{N}$, supposons n impair pour ne pas avoir de problème de signe, i.e. u_n est

négatif et u_{n+1} positif, alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| - |u_n| &= u_{n+1} + u_n \\ &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, effectuons le changement de variables $y = x - \pi$. Alors quand $x = (n+1)\pi$, $y = n\pi$; quand $x = (n+2)\pi$, $y = (n+1)\pi$. $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(y+\pi)}{y+\pi} = -\frac{\sin(y)}{y+\pi}$. Enfin, $dx = dy$. Donc

$$\int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(y)}{y+\pi} dy,$$

donc

$$|u_{n+1}| - |u_n| = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(x) \left(-\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} \right) dx.$$

Or, n est impair, donc $\sin(x)$ est négatif sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, et $\left(-\frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} \right) \geq 0$, donc $|u_{n+1}| - |u_n| \leq 0$. On aurait la même inégalité si n était pair, donc $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. ■

Exercice 14. ●●○

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $(2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n \in \mathbb{N}$.

D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-\sqrt{3})^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \sqrt{3}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} \sqrt{3}^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} ((-1)^k + 1) \sqrt{3}^k. \end{aligned}$$

Or, $(-1)^k + 1 = 0$ si k est impair et $(-1)^k + 1 = 2$ si k est pair, donc

$$\begin{aligned}(2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 2 \times \sqrt{3}^k \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^{n+1-2p} \sqrt{3}^{2p} \\ &= \sum_{0 \leq 2p \leq n} \binom{n}{2p} 2^{n+1-2p} 3^p \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

car tous les coefficients binomiaux sont dans $\mathbb{N}$. D'où le premier résultat.

2. En déduire la nature de la série de terme général $\sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$.

Posons pour tout n dans $\mathbb{N}$, $k_n = (2 - \sqrt{3})^n + (2 + \sqrt{3})^n$. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(2 + \sqrt{3})^n = k_n - (2 - \sqrt{3})^n$. Donc

$$\begin{aligned}\sin((2 + \sqrt{3})^n \pi) &= \sin(k_n \pi - (2 - \sqrt{3})^n \pi) \\ &= (-1)^{k_n} \sin(-(2 - \sqrt{3})^n \pi) \\ &= (-1)^{k_n+1} \sin((2 - \sqrt{3})^n \pi),\end{aligned}$$

donc $|\sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)| = |\sin((2 - \sqrt{3})^n \pi)|$. Or, $|2 - \sqrt{3}| < 1$ donc $(2 - \sqrt{3})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc

$$|\sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)| \sim (2 - \sqrt{3})^n,$$

terme général d'une série géométrique positive convergente, $\sum \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$ converge absolument, donc $\sum \sin((2 + \sqrt{3})^n \pi)$ converge.

Exercice 15 (Équivalents de restes). ●●○

1. En utilisant une comparaison série-intégrale, montrer que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

Comme on veut un équivalent de la série, on va essayer d'encadrer le terme général de la série entre deux intégrales (et pas l'intégrale entre deux termes généraux de séries, comme ce qui a été fait en cours). Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)}$, on sait que pour tout $k \geq 3$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t \ln(t)} dt,$$

i.e.

$$\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)} \leq \ln(\ln(k)) - \ln(\ln(k-1)),$$

i.e., en sommant de $k = 3$ à n , et par télescopage,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)),$$

donc

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2 \ln(2)} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)}.$$

Or, $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) + \frac{1}{2 \ln(2)} \sim \ln(\ln(n))$ et $\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2 \ln(2)} \sim \ln(\ln(n))$,

donc, par encadrement, $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)} \sim \ln(\ln(n))$.

2. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

On fait de même ! Si $k \geq 2$,

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2},$$

donc

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

donc pour tous $2 \leq n \leq N$, en sommant de n à N et par télescopage,

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{N} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1},$$

donc, en faisant tendre N vers $+\infty$,

$$\frac{1}{n-1} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n},$$

et, comme $\frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$, on en déduit que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

Exercice 16. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ sur $[-1, 1]$. Quelle est la nature de la série de terme général

$$n \left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) \right) - 2f'(0)?$$

Effectuons un développement limité :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{n}\right) &= f(0) + \frac{1}{n}f'(0) + \frac{1}{2n^2}f''(0) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ f\left(-\frac{1}{n}\right) &= f(0) - \frac{1}{n}f'(0) + \frac{1}{2n^2}f''(0) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

(on pourrait vraiment développer à l'ordre 3 mais ce qui nous importe, c'est la puissance de n que l'on peut obtenir)

Donc

$$f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}f'(0) + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

d'où

$$n\left(f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(-\frac{1}{n}\right)\right) - 2f'(0) = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc, par comparaison à une série absolument convergente, la série est absolument convergente, donc convergente.

Remarque : si f n'était pas $\mathcal{C}^3$, les choses ne seraient pas du tout si évidentes. Il suffit de prendre $f(x) = x^3 \sin(1/x)$ qui est $\mathcal{C}^2$ mais n'admet pas de dl à l'ordre 3.

3 Études plus théoriques

Exercice 17. ●○○ Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. Montrer que si la série de terme général $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, alors la série de terme général (u_n) converge.

Il suffit de remarquer que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times \prod_{k=1}^n \frac{u_k}{u_{k-1}} \leq u_0 \times \prod_{k=1}^n \frac{v_k}{v_{k-1}} = \frac{u_0}{v_0} v_n,$$

donc $u_n = O(v_n)$ et, comme les deux séries sont à termes positifs et que $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge.

Exercice 18. ●●○ Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge. Étudier la série de terme général $n(u_{n-1} - u_n)$ et en déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Soit N dans $\mathbb{N}$. On calcule

$$\sum_{n=1}^N n(u_{n-1} - u_n) = u_0 - u_1 + 2u_1 - 2u_2 + \cdots + Nu_{N-1} - Nu_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k - Nu_N \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k,$$

car $u_k \geq 0$ et $\sum u_k$ converge. Or, u_k est décroissante, donc pour tout entier naturel n , $n(u_{n-1} - u_n) \geq 0$, donc $\sum n(u_{n-1} - u_n)$ est une série à termes positifs et bornée, donc c'est une série convergente. Donc $\sum_{n=1}^N n(u_{n-1} - u_n)$ converge. Donc

$$Nu_N = \sum_{k=0}^{N-1} u_k - \sum_{n=1}^N n(u_{n-1} - u_n) \text{ converge vers une limite } \ell.$$

Or, si $\ell \neq 0$, $Nu_N \sim \ell$, i.e. $u_N \sim \frac{\ell}{N}$, terme général d'une série divergente : absurde ! Donc $\ell = 0$, donc $u_N = o\left(\frac{1}{N}\right)$.

Exercice 19. ●●○

1. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ diverge.

$$\text{Montrer que } \sum_{k=0}^n u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k.$$

On écrit que $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n v_k + \sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k.$$

Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$. Soit alors $\varepsilon > 0$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N_1$, $\varepsilon_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ensuite, $\sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Soit alors N_2 tel que

pour tout $n \geq N_2$,

$$\underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k v_k}_{\text{constante indte de } n} \leq \sum_{k=0}^n v_k,$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k v_k \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k,$$

Alors pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k &= \sum_{k=0}^{N_1} \varepsilon_k v_k + \sum_{k=N_1+1}^n \varepsilon_k v_k \\ &\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k}_{\text{car } n \geq N_2} + \underbrace{\sum_{k=N_1+1}^n \frac{\varepsilon}{2} v_k}_{\text{car } k \geq N_1} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_1+1}^n v_k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n v_k \text{ car } \forall k \in \mathbb{N}, v_k \geq 0 \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=0}^n v_k, \end{aligned}$$

d'où le résultat !

2. Soient u_n et v_n deux suites à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $\sum u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k \geq n} u_k \sim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq n} v_k$.

On va faire un peu de même, mais en plus simple. On écrit que $u_n = v_n + \varepsilon_n v_n$ avec $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k + \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k v_k.$$

Il s'agit donc de montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$. Soit $\varepsilon > 0$, N tel que $\forall k \geq N$, $0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon$.
Alors pour $n \geq N$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon_k v_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \varepsilon v_k = \varepsilon \left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \right),$$

d'où le résultat !

Exercice 20 (Une étude fine de la série harmonique). ●●●

1. Montrer que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ tend vers une constante. On appellera cette constante constante d'Euler et on la notera γ .

On a de plus $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1) \right)$. Or, $\frac{1}{n} - \ln(n) - \ln(n-1) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, terme général d'une série convergente. D'où la convergence de u_n .

2. À l'aide de la série de terme général $(u_{n+1} - u_n)$ et d'une comparaison série/intégrale, montrer que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

On écrit $v_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. Étudier $u_n - \gamma$ revient à étudier $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = -(u_{n-1} - \gamma)$. Or,

$$v_k = \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2}$$

, donc $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2}$.

On en déduit que $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} -\frac{1}{2k^2} \sim -\frac{1}{2n}$, donc $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

3. Montrer enfin que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ensuite, on définit $w_n = v_n - \frac{1}{2n}$, et on étudie $\sum_{k \geq n} w_{k+1} - w_k \sim -w_n$. Or,

$$\begin{aligned} w_k - w_{k-1} &= v_k - v_{k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2} \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k-2} \\ &= -\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right) + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \\ &= -\frac{1}{3k^3} + \frac{1}{2k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) \sim \frac{1}{6k^3}, \end{aligned}$$

donc $\sum w_k - w_{k-1}$ converge et le reste est équivalent à $\frac{1}{2} \frac{1}{6k^2}$, donc $-w_n \sim \frac{1}{12n^2}$, d'où le développement désiré !

Exercice 21 (Développement décimal d'un réel). Soit $x \in \mathbb{R}$. Une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée développement décimal de x si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geq 1$, $c_k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_k}{10^k}$.

On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

On définit la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $d_0 = a_0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $d_n = 10^n(a_n - a_{n-1})$.

1. Vérifier que si $c_0 \in \mathbb{Z}$, si pour tout $k \geq 1$, $c_k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, la série de terme général $\frac{c_k}{10^k}$ converge.

2. Démontrer que $d_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}$.

Un développement décimal $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de x est dit **propre** si la suite n'est pas constante à partir d'un certain rang.

3. Démontrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie ci-dessus est un développement décimal propre de x .
4. Démontrer qu'il y a unicité du développement décimal propre d'un réel.

Exercice 22 (Rationnels et développement décimal). ●●●

Le but de cet exercice est de montrer qu'un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang. Afin de simplifier les choses, supposons, sans perte de généralité, $x \in]0, 1[$. Posons (d_n) le développement décimal propre de x .

1. Si $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang...

(i) Traduire l'énoncé « $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir d'un certain rang »

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, d_{k+p} = d_k$. Réécrivons de manière beaucoup plus astucieuse cet énoncé. On a $d_N = d_{N+p} = d_{N+2p} = \dots, d_{N+1} = d_{N+1+p} = \dots$, etc. Cela signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, qu'il existe $p \in \mathbb{N}, b_0, \dots, b_{p-1}$ p entiers de $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \forall i \in \mathbb{N}, d_{N+k+ip} = b_k.$$

- (ii) Écrire en séparant et en regroupant convenablement les termes de la série du développement décimal de x le nombre x sous la forme

$$x = a + \frac{10^p}{10^N(10^p - 1)} b,$$

où a et b sont des rationnels et N un entier défini dans la question précédente.

On suppose x périodique de période p . On a $x = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$. Or,

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n} &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{d_{N+k}}{10^{N+k}} + \sum_{k=p}^{2p-1} \frac{d_{N+k}}{10^{N+k}} + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{d_{N+k+ip}}{10^{N+k+ip}} \\ &= \frac{1}{10^N} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{ip}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k} = \frac{1}{10^N} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{ip}} \\ &= \frac{1}{10^N} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^p}} = \frac{1}{10^N} \frac{10^p}{10^p - 1} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k}. \end{aligned}$$

D'où le résultat, avec $a = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d_n}{10^n}$ et $b = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_k}{10^k}$.

2. Si x est rationnel, écrivons $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$. On définit alors les suites (q_k) et (r_k) comme le quotient et le reste de la division euclidienne de $10^k a$ par b .

(i) Montrer qu'il existe deux entiers m et n tels que b divise $10^m a - 10^n a$.

(Question pas évidente) La suite des restes r_k est une suite infinie de nombres compris entre 0 et $b-1$, donc deux nécessairement sont égaux, disons m et n . Alors $10^m a = bq_m + r_m$ et $10^n a = bq_n + r_n$ avec $r_n = r_m$. Alors $10^m a - 10^n a = b(q_m - q_n)$, d'où le résultat !

(ii) En déduire que $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$ ont les mêmes décimales après la virgule.

On écrit $\frac{10^m a}{b} = q_m + \frac{r_m}{b}$ et $\frac{10^n a}{b} = q_n + \frac{r_n}{b}$, donc les décimales après la virgule de $10^m a$ et $10^n a$ sont données par $\frac{r_m}{b} = \frac{r_n}{b}$.

(iii) En explicitant les développements décimaux de $\frac{10^m a}{b}$ et $\frac{10^n a}{b}$, en déduire que (d_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Nommons (d_k) la suite des décimales après la virgule de $10^m a$ et (δ_k) celle de $10^n a$. Alors

$d_k = \delta_k$ par la question précédente, mais, en supposant $m < n$, on a $10^n a = 10^{n-m} 10^m a$, donc $d_{k+n-m} = \delta_k$, et ce pour tout k , d'où la périodicité de (d_k) à partir d'un certain rang.

Exercice 23. ●●● On s'intéresse à des séries « extrêmes » avec un terme général décroissant très vite ou très lentement.

1. On prend $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = e^{u_n}$. Déterminer la nature de la stg $\frac{n!}{u_n}$.

On a de la convergence de manière à peu près évidente. On va par exemple montrer que si $n \geq 2$, (et c'est large) que $u_n \geq \frac{1}{2}(n-1)!^2$. L'initialisation ($n=2$) est évidente car $e^{u_0} \geq 0$ donc $u_1 \geq 0$ donc $u_2 \geq 1 = (2-1)!^2$. Ensuite, si $u_n \geq (n-1)!^2$,

$$u_{n+1} = e^{u_n} \geq 1 + u_n + \frac{u_n^2}{2!} + \frac{u_n^3}{6} \geq \frac{(n-1)!^3}{48} \geq (n-1)!^2,$$

dès lors que $(n-1) \geq 5$, i.e. $n \geq 6$. Il faut donc vérifier pour les 5 premiers termes, et ça marche bien!

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f(n) = n \times \ln(n) \times \ln(\ln(n)) \times \dots \times \ln^{(k_n)}(n)$ où $\ln^{(k)}$ est le logarithme itéré k fois et où k_n est le plus grand entier naturel k tel que $\ln^{(k)}(n) \geq 1$. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{f(n)}$.

(Corrigé très succinct!) Notons (e_n) la suite u_n avec $u_0 = 1$.

Notons $f_i : [e_i, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto t \ln(t) \dots \ln^{(i)}(t)$.

La série en question a pour terme général $\frac{1}{f(n)}$ où $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction dont la restriction à $[e_i, e_{i+1}]$ est f_i pour tout entier naturel i . Chaque f_i est continue et croissante et $f_{i-1}(e_i) = f_i(e_i) = a_i$, où $a_i = e_0 e_1 e_2 \dots e_i$, ce pour tout $i \geq 1$. Il en résulte que f est continue et croissante. La série $\sum \frac{1}{f(n)}$ et l'intégrale de $\frac{1}{f}$ ont même nature. Posons $E_i = \int_{e_i}^{e_{i+1}} \frac{1}{f_i(t)} dt$. On sait que $f_i(e^u) = e^u f_{i-1}(e^u)$ donc fait le changement de variables $t = e^u$ et donc on trouve $E_i = 1$ pour tout i . Donc l'intégrale de $\frac{1}{f}$ diverge, donc la série aussi.

4 Autres exercices

Exercice 24. ●○○ Étudier la sommabilité des familles suivantes (on ne demande pas de calcul de la somme !)

$$\left(\frac{1}{1+mn} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}, \quad \left(\frac{1}{1+m^2n^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}, \quad \left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$$

La famille est à termes positifs. Pour n entier non nul fixé, on a $\frac{1}{1+mn} \underset{m \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{nm}$ et $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{mn} = \frac{1}{n} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} = +\infty$, donc

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{1+mn} = +\infty.$$

La famille n'est donc pas sommable.

On remarque que $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad 0 \leq \frac{1}{1+m^2n^2} \leq \frac{1}{m^2n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2}$ est convergente, et $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2n^2} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} \right)$ qui converge. D'après le théorème de sommation par paquets, la famille $\left(\frac{1}{m^2n^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et par comparaison La famille $\left(\frac{1}{1+m^2n^2} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

La famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est à termes positifs. Pour $p \geq 2$, on pose $I_p = \{(n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \mid m+n=p\}$.

La famille $(I_p)_{p \geq 2}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. Pour $p \geq 2$, la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in I_p}$ est clairement

sommable puisque l_p est fini et on a

$$\sum_{(m,n) \in l_p} \frac{1}{(m+n)^\alpha} = \frac{\text{Card } l_p}{p^\alpha} = \frac{p-1}{p^\alpha} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$$

Par critère de Riemann, on conclut que la famille $\left(\frac{1}{(m+n)^\alpha} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 25. ●○○ Discuter de la sommabilité des familles suivantes, et calculer leur somme

$$\left(\frac{2^{k-n}}{k(k+1)} \right)_{(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}, \left(\frac{z^p}{q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}, \left(\frac{a^p b^q}{p! q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}, \left(\frac{q^p z^p}{p! q!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}, \left(\binom{p+q}{p} z^{p+q} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$$

Exercice 26. ●●○ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer l'égalité $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}$

Exercice 27. ●●○ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} d(n) z^n$ où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n .

Exercice 28 (Sommutation par paquets et partie entière). ●●○

1. Montrer que $2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{2^n}$.

2. Justifier l'existence puis calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 29 (Critère de condensation de Cauchy). ●●○

1. Soit (a_n) une suite réelle positive décroissante. On pose $S = \sum_{n \geq 1} a_n$ et $T = \sum_{k \geq 0} 2^k a_{2^k}$. Montrer que $S \leq T \leq 2S$.

2. Retrouver les CNS de convergence des séries de Riemann et de Bertrand.

Exercice 30 (Calculs autour de la fonction ζ). ●●○

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Justifier l'existence de $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2}$ puis montrer

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \zeta(2k+2) z^{2k}.$$

2. (a) Démontrer que pour tout x dans $] -1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

(b) Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Rappeler pourquoi il existe $\gamma > 0$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

(c) Calculer, en fonction de γ , $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\zeta(p) - 1}{p}$ et $\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p \frac{\zeta(p)}{p}$.

Exercice 31 (Réarrangements de la série de Riemann – Oral Centrale). ●●● On pose, pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, et $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. On définit une permutation σ de $\mathbb{N}^*$, en alternant p entiers impairs et q entiers pairs, en respectant l'ordre des entiers de même parité :

- $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(p) = 2p - 1,$
- $\sigma(p+1) = 2, \sigma(p+2) = 4, \dots, \sigma(p+q) = 2q,$
- $\sigma(p+q+1) = 2p+1, \dots, \sigma(2p+q) = 4p-1,$
- $\sigma(2p+q+1) = 2q+2, \dots$

On note alors pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n^{p,q} = \sum_{k=1}^n a_{\sigma(k)}$

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

2. Exprimer, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $S_{(p+q)N}^{p,q}$ en fonction des termes de la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et donner une expression de sa somme en fonction de p et q .

On dit qu'une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ est bimonotone si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\sigma^{-1}(2k) < \sigma^{-1}(2k+2)$, et $\sigma^{-1}(2k-1) < \sigma^{-1}(2k+1)$. Par exemple, la permutation définie dans la première partie du sujet est bimonotone. On note alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n(\sigma) = \text{card}\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(k) \text{ est pair.}\}$$

3. Soit σ une permutation bimonotone de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente ssi il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que : $p_n(\sigma) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha n$. Dans ce cas, donner une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)}$ en fonction de α .

4. Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, il existe une permutation σ de $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = x$$

5. Soit maintenant $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite quelconque de réels. A quelle condition nécessaire et suffisante le résultat de la question précédente reste-t-il vrai ?

Exercice 32. ●●● Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \text{Arctan}(n+1) - \text{Arctan}(n)$.

1. Montrer que pour tout $(\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $\sum \varepsilon_n u_n$ converge et que sa somme est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On définit (ε_n) par
 - si $x \leq \frac{\pi}{4}$, $\varepsilon_0 = 0$, sinon $\varepsilon_0 = 1$.
 - $\forall n \in \mathbb{N}$, si $x \leq \sum_{k=0}^n \varepsilon_k u_k + u_{n+1}$, $\varepsilon_{n+1} = 0$, sinon $\varepsilon_{n+1} = 1$.

Démontrer que $\sum \varepsilon_n u_n$ a pour somme x .

3. De manière générale, si (u_n) est décroissante positive, si $\sum u_k$ converge et sa somme égale S , à quelle condition sur la suite tout réel x de $[0, S]$ s'écrit-il sous la forme $x = \sum \varepsilon_n u_n$?

Je n'ai pas le temps de taper le corrigé pour le moment, mais ne pas hésiter à me demander des détails !

DEBUT ↖