FIN ↘

# TD25
# Espaces préhilbertiens réels
(avec corrigé)

## 1 Exercices corrigés en classe

**Exercice 1.** Soit $p$ un projecteur d'un espace vectoriel euclidien $E$. Démontrer que $p$ est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

**Exercice 2.** ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Soit $u$ un endomorphisme de $E$. On définit l'application $u^*$ de $E$ dans $E$ par

$$\forall x \in E,\ u^*(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|u(e_i))e_i.$$

**1.** Montrer que $u^*$ est un endomorphisme de $E$. On l'appelle *adjoint* de $u$.

Déjà $u^*$ va bien de $E$ dans $E$ car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$. Montrons que $u$ est linéaire. Soient $x$ et $y$ dans $E$, $\lambda$ et $\mu$ dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} u^*(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x + \mu y|u(e_i))e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda(x|u(e_i)) + \mu(y|u(e_i))\right) e_i \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} (x|u(e_i))e_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \mu(y|u(e_i))e_i = \lambda u^*(x) + \mu u^*(y). \end{aligned}$$

**2.** **(i)** Soit $x$ dans $E$. Montrer que pour tous $x$ et $y$ de $E$, $(u^*(x)|y) = (x|u(y))$.

Soit $j$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors

$$(u^*(x)|e_j) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x|u(e_i))e_i \middle| e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}(x|u(e_i))(e_i|e_j).$$

Or, si $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$, donc

$$(u^*(x)|e_j) = (x|u(e_j)), \text{ d'où le résultat.}$$

Soient $x$ et $y$ dans $E$, écrivons $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. Alors

$$\begin{aligned}(u^*(x)|y) &= \left(u^*(x)\middle|\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j(u^*(x)|e_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j(x|u(e_j))\\ &= \left(x\middle|\sum_{j=1}^{n} y_j u(e_j)\right) = (x|u(y)).\end{aligned}$$

---

**(ii)** Montrer que la propriété précédente caractérise l'adjoint, i.e. que si $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\forall (x, y) \in E^2,\ (v(x)|y) = (x|u(y))$, alors $v = u^*$.

---

Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tous $x$ et $y$ dans $E$, $(v(x)|y) = (x|u(y))$. Alors pour tous $x$ et $y$, $(v(x)|y) = (u^*(x)|y)$, i.e. $((v - u^*)(x)|y)$. Soit $x$ dans $E$, posons $y = (v - u^*)(x)$. Alors

$$0 = ((v - u^*)(x)|y) = ((v - u^*)(x)|(v - u^*)(x)) = \|(v - u^*)(x)\|^2,$$

donc $(v - u^*)(x) = 0$, donc $v - u^* = 0$, donc $v = u^*$. D'où le résultat.

**(iii)** Si $u \in \mathscr{L}(E)$, déterminer $(u^*)^*$.

Soient $x$ et $y$ dans $E$. Alors par symétrie du produit scalaire, $(u(x)|y) = (y|u(x)) = (u^*(y)|x) = (x|u^*(y))$. Par la question précédente, on a donc $(u^*)^* = u$.

**3.** Montrer que la définition de $u^*$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une autre base orthonormale et $v$ défini pour tout $x$ par $v(x) = \sum_{i=1}^{n}(x|u(\varepsilon_i))\varepsilon_i$. Alors par les mêmes raisonnements que précédemment, pour tous $x$ et $y$ dans $E$, $(v(x)|y) = (x|u(y)$. Donc $v = u^*$. Donc la définition de $u^*$ ne dépend pas de la base orthonormale choisie.

**4.** Si $M$ est la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}$, exprimer la matrice de $u^*$ dans $\mathscr{B}$ en fonction de $M$.

Écrivons $M = (m_{ij})$. On a pour tous $i$ et $j$ $m_{ij} = (u(e_j)|e_i)$. Ensuite, si $N = (n_{ij})$ est la matrice de $u^*$, on a, en remarquant que $u^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n}(u(e_i)|e_j)e_i$, $n_{ij} = (u(e_i)|e_j) = m_{ji}$. Donc $N = {}^{t}M$. **Voilà enfin une interprétation géométrique de ce qu'est la transposée d'une matrice !**

**5.** Montrer que $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$ et que $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^{\perp}$.

- . Soit $x \in \ker(u^*)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Alors on dispose de $z$ tel que $y = u(z)$. Alors $(x|y) = (x|u(z)) = (u^*(x)|z) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Im}(u)^{\perp}$.

  . Soit $x \in \mathrm{Im}(u)^{\perp}$. Soit $y$ dans $E$. Alors $(x|u(y)) = 0$, i.e. $(u^*(x)|y) = 0$. En particulier pour $y = u^*(x)$, $(u^*(x)|u^*(x)) = 0$, i.e. $u^*(x) = 0$.
- . Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$. Alors on dispose de $z$ dans $E$ tel que $y = u^*(z)$. Soit $x \in \ker(u)$. Alors $(y|x) = (u^*(z)|x) = (z|u(x)) = 0$. Donc $y \in \ker(u)^{\perp}$.

. L'inclusion réciproque vient du fait que

$$\dim(\ker(u^*) + \dim(\mathrm{Im}(u^*)) = \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(u)^\perp) + \dim(\ker(u)^\perp),$$

et que $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

---

**Exercice 3.** ●○○ Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.** Montrer que l'expression $(A|B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ munit $E$ d'un produit scalaire.

---

Question de cours : me demander si ce n'est pas clair.

---

**2.** Soient $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels respectivement constitués des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.

---

- Déjà, on montre que ces deux sous-espaces sont supplémentaires : on procède par analyse-synthèse. Soit $M$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

  **Analyse.** On suppose $M = S + A$ avec $S$ symétrique et $A$ antisymétrique. Alors ${}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}S + {}^{\mathrm{t}}A = S - A$ par symétrie de $S$ et antisymétrie de $A$. Donc nécessairement $S = \dfrac{M + {}^{\mathrm{t}}M}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^{\mathrm{t}}M}{2}$.

  **Synthèse.** On pose $S = \dfrac{M + {}^{\mathrm{t}}M}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^{\mathrm{t}}M}{2}$, et on vérifie que $S$ est symétrique (car ${}^{\mathrm{t}}\left(\dfrac{M + {}^{\mathrm{t}}M}{2}\right) = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}M + {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M)}{2} = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}M + M}{2} = S$), que $A$ est antisymétrique (car ${}^{\mathrm{t}}\left(\dfrac{M - {}^{\mathrm{t}}M}{2}\right) = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}M - {}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}M)}{2} = \dfrac{{}^{\mathrm{t}}M - M}{2} = -A$) et que la somme des deux vaut $M$ (évident).
  D'où la supplémentarité des deux espaces.

- On vérifie ensuite que ces deux sous-espaces vectoriels sont orthogonaux. Soit $S$ symétrique et $A$ antisymétrique. Alors

$$\langle A, S\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AS) = \mathrm{tr}(-AS) = -\,\mathrm{tr}(AS) = -\,\mathrm{tr}(SA) = -\,\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}SA) = -\,\langle S, A\rangle = -\,\langle A, S\rangle\,,$$

donc $\langle A, S\rangle = 0$ donc les deux sous-espaces sont supplémentaies orthogonaux.

**Remarque :** Une autre possibilité est de montrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont orthogonaux, et que $\dim(\mathscr{S}_n)+\dim(\mathscr{A}_n) = \dim(\mathscr{M}_n)$ !

---

**3.** Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $E$. Exprimer, à l'aide des coefficients $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,

$$\min_{M=(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-m_{ij})^2.$$

---

On remarque que l'on cherche à minimiser $\|A-M\|^2$ pour $M$ dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Ce minimum est atteint pour $M$ le projeté orthogonal de $A$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, i.e $M = \dfrac{A+{}^{\mathrm{t}}A}{2}$ (car la décomposition de $A$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus^{\perp} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est donnée par $A = \dfrac{A+{}^{\mathrm{t}}A}{2} + \dfrac{A-{}^{\mathrm{t}}A}{2}$). Donc le minimum recherché est

$$\left\|A - \frac{A+{}^{\mathrm{t}}A}{2}\right\|^2 = \left\|\frac{A-{}^{\mathrm{t}}A}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_{ij}-a_{ji})^2.$$

---

**Exercice 4.** *Famille de polynômes orthogonaux*

**1.** Montrer que $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\cdot Q(t)\cdot dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, .

**2.** Démontrer qu'il existe une famille $(Q_n)$ de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $\deg(Q_n) = n$.

**3.** Montrer que $Q_n$ a la même parité que $n$ $(Q_n(-x) = (-1)^n \cdot Q_n(x))$.

**4.** Montrer que $Q_n$ admet $n$ racines distinctes, toutes entre $-1$ et 1.

**Exercice 5.** ●●◐ Soit $E$ un espace euclidien de dimension $n$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $E$.

**1.** Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée de $E$. Démontrer que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ satisfait $A\times A^{\top} = \mathrm{I}_n$. En déduire la valeur de $\det(A)$.

**2.** Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille orthogonale de $E$. Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)| = \|u_1\|\dots\|u_n\|$.

Si $(u_1, \dots, u_n)$ est orthonormale, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(A)$ où $A$ est la matrice formée de $(u_1, \dots, u_n)$ qui est orthogonale. Donc $\det_{\mathcal{B}}(A) = 1$. Donc $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 1$. Si la famille n'est pas orthonormale, on la normalise et on trouve $\det_{\mathcal{B}}\left(\frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|}\right) = 1$, d'où le résultat.

**3.** Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille quelconque de $E$. Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leqslant \|x_1\| \dots \|x_n\|$.

On applique l'algorithme de Gram-Schmidt à $(x_1, \dots, x_n)$. On orthogonalise d'abord. On obtient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ une famille orthogonale telle que $\varepsilon_k$ s'écrive sous la forme $x_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k,i} x_i$. Le caractère alterne et la multilinéarité du déterminant assurent alors que

$$\det_{\mathcal{B}}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \det_{\mathcal{B}}\left(x_1, x_2 + \lambda_{2,1}x_1, x_3 + \lambda_{3,1}x_1 + \lambda_{3,2}x_2, \dots, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{n,i} x_i\right) = \det(x_1, \dots, x_n).$$

Ensuite, on remarque que $\|\varepsilon_k\|^2 = \left\|x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \varepsilon_i\right\|^2$, et $\sum_{i=1}^{k-1} \mu_i \varepsilon_i \perp x_k$, d'où l'inégalité.
Cela s'interprète géométriquement en disant que le volume d'un parallélogramme (ou d'un parallélépipède) est inférieur au produit des longueurs de ses côtés. La méthode utilisée illustre même la formule de l'aire d'un parallélogramme utilisant la hauteur de ce dernier (i.e. la longueur du vecteur orthogonalisé).

**Exercice 6** (Matrice et déterminant de Gram). ●●● Soient $(x_1, \dots, x_p)$ un système de $p$ vecteurs d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$. Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de $E$. On appelle matrice de Gram associée à $(x_1, \dots, x_p)$ la matrice

$$\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_p, x_1\rangle & \langle x_p, x_2\rangle & \cdots & \langle x_p, x_p\rangle \end{pmatrix}$$

**1.** Montrer que $\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p)$ est une matrice symétrique.

C'est immédiat, car $\langle x_i, x_j\rangle = \langle x_j, x_i\rangle$ par symétrie du produit scalaire.

On appelle déterminant de Gram de $(x_1, \dots, x_p)$ la quantité $G(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p))$.

**2.** **(i)** Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = 0$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est lié.

$G(x_1, \dots, x_p) = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que les colonnes de la matrice vérifient $\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0$, i.e. ssi

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_1 \langle x_i, x_1 \rangle + \dots + \lambda_p \langle x_i, x_p \rangle = 0.$$

Nommons $u = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k$. Alors $G(x_1, \dots, x_p) = 0$ ssi pour tout $i$ dans $[\![1, p[\![$, $\langle x_i, u \rangle = 0$ i.e., comme $(x_1, \dots, x_n)$ est une base, pour tout $y$ de $E$, $\langle y, u \rangle = 0$, i.e. ssi $u = 0$, i.e. $(x_1, \dots, x_p)$ est liée. (remarquez, la double implication est plus digeste).

**(ii)** Soit $M$ la matrice de $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p) = M^\top M$.

Écrivons $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et ${}^tM = (n_{ij})$. Alors pour tous $i$ et $j$, $m_{ij} = \langle x_j, e_i \rangle$. Alors si ${}^tMM = a_{ij}$, on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} n_{ik} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \langle x_i, e_k \rangle \langle x_j, e_k \rangle = \left\langle x_i, \sum_{k=1}^{n} \langle x_j, e_k \rangle e_k \right\rangle = \langle x_i, x_k \rangle .$$

On reconnaît les coefficients de la matrice de Gram.

**(iii)** Montrer que lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre, on a $G(x_1, \dots, x_p) > 0$.

Par la propriété précédente, $\det(\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p)) = \det({}^tMM) = \det(M)^2 \geqslant 0$, et même $> 0$ si la famille est libre.

**3.** En orthonormalisant le système $(x_1, \dots, x_p)$, montrer que

$$G(x_1, \dots, x_p) \leqslant \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_p\|^2 .$$

Vient de l'exercice précédent !

**4.** On suppose le système $(x_1, \dots, x_p)$ libre. Soit $z$ le projeté orthogonal d'un vecteur $y$ sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $\|y - z\|^2 = \dfrac{G(y, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, x_2, \dots, x_p)}$.

Soit $p$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Alors la distance cherchée est $\|y - p(y)\|$. Posons $u = y - p(y)$. Or, $p(y) = \sum_{i=1}^{p} \langle y, e_i \rangle e_i$. Donc $\langle p(y), e_k \rangle = \langle y, e_k \rangle$ pour tout $k$ dans $[\![1, p]\!]$, donc pour tout $k$ dans $[\![1, p]\!]$, $\langle u, e_k \rangle = 0$. Donc

$$G(x_1, \dots, x_p, y) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_1, y \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x_n, y \rangle \\ \langle y, x_1 \rangle & \langle y, x_2 \rangle & \cdots & \langle y, x_n \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}$$

Or, $\langle x_k, y \rangle = \langle x_k, p(y) \rangle$ et $\|y\|^2 = \|p(y)\|^2 + \|u\|^2$, d'où

$$G(x_1, \dots, x_p, y) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_1, p(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x_n, p(x) \rangle \\ \langle p(x), x_1 \rangle & \langle p(x), x_2 \rangle & \cdots & \langle p(x), x_n \rangle & \|p(x)\|^2 + \|u\|^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_1, p(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x_n, p(x) \rangle \\ \langle p(x), x_1 \rangle & \langle p(x), x_2 \rangle & \cdots & \langle p(x), x_n \rangle & \|p(x)\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x_n, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle & 0 \\ \langle p(x), x_1 \rangle & \langle p(x), x_2 \rangle & \cdots & \langle p(x), x_n \rangle & \|u\|^2 \end{vmatrix}.$$

Le premier des deux déterminants est nul car $p(x) \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, et, en développant le second selon la dernière colonne, on obtient

$$G(x_1, \dots, x_p, y) = \|u\|^2 \, G(x_1, \dots, x_p),$$

d'où le résultat.

---

**Stratégie.**

- commencer par deux petits exercices : 7, 12.
- utiliser ensuite Cauchy-Schwarz : 9.
- faire un exercice sur les endomorphismes : ou bien 14 dans sa version plus simple, ou bien 20 pour une version plus corsée.

## 2 Notion de produit scalaire, d'orthogonalité

**Exercice 7.** ●○○ Vérifier que les applications suivantes sont des produits scalaires sur les espaces mentionnés

**(i)** $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

---

On vérifie que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ définit un produit scalaire.

- Déjà pour tous $P$ et $Q$ dans $E$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) \in \mathbb{R}$.
- **Symétrie.** Soient $P$ et $Q$ dans $E$. Alors

$$\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}(0)P^{(k)}(0) = \langle Q|P\rangle\,.$$

- **Bilinéarité.** On vérifie seulement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $P_1$, $P_2$ et $Q$ dans $E$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors

$$\begin{aligned}\langle \lambda P_1 + \mu P_2 | Q\rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P_1 + \mu P_2)^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)\\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda P_1^{(k)}(0) + \mu P_2^{(k)}(0)\right) Q^{(k)}(0) \text{ par linéarité de la dérivation.}\\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} P_1^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) + \mu \sum_{k=0}^{n} P_2^{(k)}(0)Q^{(k)}(0),\end{aligned}$$

d'où la lineárité par rapport à la première variable, d'où la bilinéarité.

- **Positivité et caractère défini.** Soit $P$ dans $E$. Alors

$$\langle P|P\rangle = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)}(0)\right)^2 \geqslant 0,$$

d'où la posititvité. Cette quantité est nulle si, et seulement si pour tout $k \leqslant n$, $P^{(k)}(0) = 0$. Or, $\deg(P) = n$, donc, d'après la formule de Taylor, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k = 0$, donc $P = 0$. D'où le caractère défini.

Donc $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, donc c'est un produit scalaire sur $E$.

---

**(ii)** $E = \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $(f|g) = f(a)g(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)g'(t)dt$.

On vérifie que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

- Déjà, pour toutes $f$ et $g$ dans $E$, $f(a)g(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)g'(t)dt \in \mathbb{R}$.
- **Symétrie.** Soient $f$ et $g$ dans $E$. Alors

$$(f|g) = f(a)g(a) + \int_a^b f'(t)g'(t)dt = g(a)f(a) + \int_a^b g'(t)f'(t)dt = (g|f).$$

- **Bilinéarité.** On vérifie seulement la linéarité par rapport à la première variable. Soient $f_1$, $f_2$

et $g$ dans $E$, $\lambda$ et $\mu$ deux réels. Alors

$$\begin{aligned}(\lambda f_1+\mu f_2|g) &= (\lambda f_1+\mu f_2)(a)g(a)+\int_a^b(\lambda f_1+\mu f_2)'(t)g'(t)dt\\ &= \lambda f_1(a)g(a)+\mu f_2(a)g(a)+\int_a^b(\lambda f_1'(t)+\mu f_2'(t))g'(t)dt \text{ par linéarité de la dérivation}\\ &= \lambda f_1(a)g(a)+\mu f_2(a)g(a)+\lambda\int_a^b f_1'(t)g'(t)dt+\mu\int_0^1 f_2'(t)g'(t)dt \text{ par linéarité de l'intégrale}\end{aligned}$$

- **Positivité et définition.** Soit $f$ dans $E$. Alors

$$(f|f)=f(a)^2+\int_a^b f'(t)^2dt\geqslant 0.$$

Il y a égalité si et seulement si $f(a)=0$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)^2dt=0$, i.e. ssi $f(a)=0$ et $f'(t)=0$ pour tout $t$ de $[a,b]$, i.e. ssi $f(a)=0$ et $f$ est constante sur $[a,b]$, donc ssi $f$ est nulle. D'où la positivité et le caractère défini.

---

**Exercice 8** (Un produit scalaire original). ●●◐ Soit $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On considère une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans $[0,1]$. On pose alors $(f\mid g)=\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{2^k}f(a_k)\,g(a_k)$

**1.** Justifier que cette quantité est bien définie.

**2.** Montrer que c'est un produit scalaire si et seulement si $(a_n)_n$ est dense dans $[0,1]$.

**Exercice 9.** ●●○ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}\leqslant\sqrt{(n+1)2^n}$.

---

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz, avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}=$

$\langle U, X\rangle$ où $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X = \left(\sqrt{\binom{n}{k}}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$, et $\langle U, X\rangle \leqslant \|U\|\,\|X\|$. Or,

$$\|U\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1} = \sqrt{n+1} \text{ et } \|X\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}} = \sqrt{2^n}.$$

D'où le résultat.

---

**Exercice 10.** ●●○

Déterminer le minimum, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, de la quantité $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

---

Attention ! Regardez-bien l'endroit où est posé cet exercice... Il ne s'agit pas encore de projection orthogonale, simplement de Cauchy-Schwarz.

On sait, en prenant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^n$, et en notant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, que pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_n\right)^2 = \langle U, X\rangle^2 \leqslant \|U\|^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2,$$

donc si $\sum_{k=1}^{n} x_n = 1$, $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \geqslant \frac{1}{n}$.

Il y a égalité ssi il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, i.e. si et seulement si $X$ et $U$ sont colinéaires, i.e. ssi $X = \lambda U$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Mais alors $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, donc $\lambda n = 1$, donc $\lambda = \frac{1}{n}$.

Le minimum de $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ est donc $\frac{1}{n}$, atteint en $X = \frac{1}{n} U$.

---

**Exercice 11.** ●●○

Soient $E$ un eve et $x, y$ dans $E$. Développer l'expression

$$\left\| \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle y \right\|^2$$

et retrouver une inégalité célèbre.

---

On développe :

$$\begin{aligned}\left\| \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle y \right\|^2 &= \left\| \|y\|^2 x \right\|^2 - 2\left\langle \|y\|^2 x, \langle x, y\rangle y \right\rangle + \|\langle x, y\rangle y\|^2 \\ &= \|y\|^4 \|x\|^2 - 2\|y\|^2 \langle x, y\rangle \langle x, y\rangle + \langle x, y\rangle^2 \|y\|^2 \\ &= \|y\|^4 \|x\|^2 - \|y\|^2 \langle x, y\rangle^2 \\ &= \|y\|^2 \left( \|y\|^2 \|x\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \right)\end{aligned}$$

Cette quantité étant une norme, elle est toujours positive, donc $\|y\|^2 \|x\|^2 - \langle x, y\rangle^2 \geqslant 0$, donc

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|y\|^2 \|x\|^2, \text{ i.e. } |\langle x, y\rangle| \leqslant \|y\| \|x\|.$$

---

**Exercice 12.** ●◐○ Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, $F$ et $G$ deux parties de $E$. Démontrer que $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

---

- Déjà, démontrons l'inclusion directe : soit $x$ dans $(F \cup G)^\perp$.

  Soit $f$ dans $F$. Alors $f \in F \cup G$ donc $x \perp f$. Donc $x \in F^\perp$.

  Soit $g$ dans $G$. Alors $g \in G \cup F$ donc $x \perp g$. Donc $x \in G^\perp$.

  Donc $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

- Ensuite, pour l'inclusion réciproque, si $x \in F^\perp \cap G^\perp$, soit $y \in F \cup G$. Alors

  — si $y \in F$, on sait que $x \in F^\perp$ donc $x \perp y$.

— si $y \in G$, on sait que $x \in G^{\perp}$ donc $x \perp y$.

D'où le résultat !

---

**Exercice 13** (Calculs explicites). ●◐○ On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

**1.** Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

**2.** Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

**3.** Déterminer la distance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au plan d'équation $x - y + z = 0$.

**Exercice 14.** ●◐○ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante

$$\big(\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0\big) \Leftrightarrow \big(\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle\big).$$

---

Démontrons le résultat par double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$. Soit alors $x$ dans $E$. Alors

$$\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle \text{ par hypothèse puis par symétrie.}$$

Donc $\langle x, u(x)\rangle = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$. Soient $x$ et $y$ dans $E$. Alors $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$, donc, en développant,

$$\langle u(x), x\rangle + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \langle u(y), y\rangle = 0,$$

soit, comme, par hypothèse, la premièr et la dernière quantité sont nulles, $\langle u(x), y\rangle = -\langle u(y), x\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.

---

**Exercice 15** (Quelques contre-exemples en dimension infinie). ●●◐ Soit $E = \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$, muni du produit sacalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

**1.** Soit $H = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$, et conclure que $(H^\perp)^\perp \neq H$.

---

Soit $f \in H^\perp$. Si $f(0) = 0$, alors $f \perp f$, donc $f = 0$.

Si $f(0) \neq 0$, supposons sans perte de généralité que $f(0) = a > 0$. Soit $\eta$ tel que $\forall x \in [-\eta, \eta]$, $f(x) > \dfrac{a}{2} > 0$. Soit $g$ définie sur $[-1,1]$, égale à $f$ sur $[-1,1] \setminus [-\eta, \eta]$, telle que $g$ est affine sur $[-\eta, 0]$, égale à $f(-\eta)$ en $-\eta$ et à 0 en 0, puis affine sur $[0, \eta]$, égale à 0 en 0 et à $f(\eta)$ en $\eta$. Alors $g$ est dans $H$ et de même signe que $f$, et donc $fg \geqslant 0$ sur $[-1,1]$, d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, donc est nulle. Donc $fg = 0$ sur $[-1,1]$ donc $f = 0$ sur $[-1,1]$ (par continuité en 0).

Donc $H^\perp = \{0\}$, donc $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq H$ ($H$ est un hyperplan de $E$).

---

**2.** Soit

$$A = \{f \in E,\ \forall t \in [-1,0],\ f(t) = 0\}$$
$$B = \{f \in E,\ \forall t \in [0,1],\ f(t) = 0\}.$$

Démontrer que $A^\perp = B$, que $B^\perp = A$, mais que $(A \cap B)^\perp \neq A^\perp + B^\perp$.

---

On fait les différentes vérifications :

- $A^\perp = B$. En effet, si $f \in A^\perp$, posons $g : t \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-1,0] \\ tf(t) \text{ si } t \in [0,1]. \end{cases}$ Alors $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 tf(t)^2 dt$, intégrale d'une fonction de signe constant qui doit alors être nulle, donc $f$ est nulle sur $[0,1]$, donc $f \in B$.

  Réciproquement, si $f \in B$, alors clairement, $f \in A^\perp$ car si $g$ est nulle sur $[-1,0]$ et $f$ sur $[0,1]$, le produit des deux fonctions est nul.

- De même, $B^\perp = A$.
- Ensuite, $A \cap B$ est l'ensemble des fonctions nulles sur $[-1,0]$ et $[0,1]$, donc $A \cap B = \{0\}$, donc $(A\cap B)^\perp = E$.
- Enfin, $A^\perp + B^\perp$ est différent de $E$. En effet, toute fonction de $A^\perp + B^\perp$ s'écrit comme $g+h$ avec $g$ nulle sur $[-1,0]$ et $h$ nulle sur $[0,1]$. Donc toute fonction de $A^\perp + B^\perp$ est nulle en 0, ce qui n'est pas le cas de toute fonction de $E$. Donc $A^\perp + B^\perp \neq (A\cap B)^\perp$ (on a inclusion stricte).

**Exercice 16.** ●●◐ Sur $E = \mathbb{E}_n[X]$, on définit $(P|Q) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

**1.** Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

On vérifie que c'est un produit scalaire comme dans le cours.

**2.** **(i)** On considère pour $k \in [\![0,n]\!]$ le polynôme $U_k$ défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ U_k(x) = \dfrac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right)$.

Montrer que $(U_0, \dots, U_n)$ est une base orthogonale de $E$.

Soient $k \neq \ell$ deux entiers. Alors

$$(U_k|U_\ell) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} U_k(x)U_\ell(x)dx.$$

Supposons $k < \ell$.Alors on fait une intégration par parties avec $u' = \dfrac{d^\ell}{dx^\ell}\left((x^2-1)^\ell\right)$, $v = \dfrac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right)$, alors $u = \dfrac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left((x^2-1)^\ell\right)$ et $v'(x) = \dfrac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left((x^2-1)^k\right)$, donc

$$\begin{aligned}(U_k|U_\ell) &= \left[\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left((x^2-1)^\ell\right)\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right)\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left((x^2-1)^\ell\right)\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left((x^2-1)^k\right)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{d^{\ell-1}}{dx^{\ell-1}}\left((x^2-1)^\ell\right)\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left((x^2-1)^k\right)dx,\end{aligned}$$

car toutes les dérivées $j$-èmes, avec $j \leqslant k$, de $(x^2-1)^k$, sont nulles en 1 et en $-1$ (car 1 et

$-1$ sont racines de multiplicité $k$). Par une récurrence immédiate, il vient

$$(U_k|U_\ell) = (-1)^\ell \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^\ell \frac{d^{k+\ell}}{dx^{k+\ell}}\left((x^2-1)^k\right)dx,$$

or comme $\ell > k$, $k+\ell > 2k = \deg((x^2-1)^k)$, donc $\dfrac{d^{k+\ell}}{dx^{k+\ell}}\left((x^2-1)^k\right) = 0$. D'où l'orthogonalité.

---

**(ii)** Calculer à l'aide d'un changement de variables $x = \cos(t)$ l'intégrale $\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k dx$. On utilisera la formule (non au programme, mais vue 2 fois en DM) des intégrales de Wallis, et on contrôlera qu'on sait calculer cette formule.

---

Posons $x = \cos(t)$.

- Quand $x = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$, quand $x = 1$, $t = 0$.
- $(-1)^k(x^2-1)^k = (1-x^2)^k = -\sin^{2k}(t)$
- $dx = \sin(t)dt$.

On en déduit que $\int_0^1 (x^2-1)^k dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^{2k+1}(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}(t)dt$. Donc, par le résultat sur les intégrales de Wallis,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}(t)dt = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!},$$

---

**(iii)** En déduire une base orthonormale, formée de vecteurs colinéaires et de même sens que $U_0, \dots, U_n$.

---

Reste ensuite à calculer la norme de $P_k$. La même récurrence que précédemment donne

$$\|P_k\|^2 = (-1)^k \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k \frac{d^{k+\ell}}{dx^2}\left((x^2-1)^k\right)dx.$$

Or, $\dfrac{d^{k+\ell}}{dx^2}\left((x^2-1)^k\right) = (2k)!$ car $(x^2-1)^k$ est de degré $2k$ de monôme dominant $X^{2k}$. D'où

$\|P_k\|^2 = \dfrac{(-1)^k(2k)!}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k dx = (-1)^k(2k)!\int_0^1 (x^2-1)^k dx.$

D'où $\|P_k\|^2 = (2k)!\dfrac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!} = \dfrac{2^{2k}(k!)^2}{2k+1}$. On normalise alors la base en divisant par les normes trouvées.

## 3 Endomorphismes des espaces euclidiens

**Exercice 17** (Similitudes). ●●○ Soit $E$ un espace euclidien, $u \in GL(E)$. On dit que $u$ est une similitude de $E$ s'il existe $\lambda$ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x$ dans $E$, $\|u(x)\| = \lambda\|x\|$.

1. Démontrer que si $u$ est une similitude, alors pour tous $x$ et $y$ dans $E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \lambda^2\langle x, y\rangle$. En déduire que $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$.

Réciproquement, on suppose que $u$ est un endomorphisme préservant l'orthogonalité, i.e. que pour tous $x$ et $y$ dans $E$, $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $E$.

2. En considérant $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$, démontrer que $\|u(e_1)\| = \|u(e_2)\|$.
3. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $x$ dans $E$, $\|u(x)\| = \lambda\|x\|$.

**Exercice 18** (Isométries). ●●○ Soit $E$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que $u$ est une isométrie si pour tout $x$ dans $E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

1. Démontrer que l'ensemble des isométries constitue un sous-groupe de $GL(E)$.
2. Démontrer que $u$ est une isométrie si, et seulement si pour tous $x$ et $y$ de $E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. Démontrer que $u$ est une isométrie si et seulement si la matrice $A$ de $u$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ vérifie $A \times A^\top = \mathrm{I}_n$.
4. Vérifier que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ sont des isométries de $\mathbb{R}^2$. Quelle transformation géométrique représentent-elles ?

**Exercice 19** (Endomorphismes symétriques). ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose dans cet exercice que $u$ est autoadjoint (on dit parfois « symétrique »), c'est-à-dire que $u^* = u$.

**1.** Que peut-on dire de la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}$ ?

Soit $M$ la matrice de $u$ dans $\mathscr{B}$. Alors ${}^{t}M$ est la base de $u^*$ dans $E$. Comme $u = u^*$, on a donc $M = {}^{t}M$, donc $M$ est symétrique.

**2.** Que peut-on dire de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$ ?

Comme $u = u^*$, on a $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$, donc $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$, donc le noyau et l'image de $u$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

**3.** *Caractérisation des symétries et projecteurs orthogonaux.*

**(a)** Montrer qu'un projecteur de $E$ est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

Soit $p$ un projecteur de $E$.

- Si $p$ est autoadjoint, alors $\ker(p) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(p) = E$, donc $p$ est un projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
- Si $p$ est un projecteur orthogonal, soient $x$ et $y$ dans $E$, écrivons $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$, avec $x_1, y_1$ dans $\ker(p)$ et $x_2, y_2$ dans $\mathrm{Im}(p)$. Comme $p$ est orthogonal, $\ker(p) \perp \mathrm{Im}(p)$. Alors

$$\begin{aligned}(x|p(y)) &= (x_1 + x_2|p(y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 + x_2|y_2) \\ &= (x_1|y_2) + (x_2|y_2) = (x_2|y_2) = (x_2|y_1 + y_2) = (p(x)|y),\end{aligned}$$

donc $p$ est orthogonal.

**(b)** Montrer que symétrie de $E$ est autoadjointe si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Soit $s$ une symétrie de $E$.

- Si $s$ est autoadjointe, soient $x$ dans $\ker(s - \mathrm{Id})$ et $y$ dans $\ker(s + \mathrm{Id})$. Alors

$$(x|y) = (s(x)|y) = (x|s(y)) = (x| - y) = -(x|y) = 0.$$

Donc $x \perp y$, donc $\ker(s - \mathrm{Id}) \perp \ker(s + \mathrm{Id})$. Donc $s$ est une symétrie orthogonale.

- Si $s$ est une symétrie orthogonale, c'est la différence de deux projecteurs orthogonaux, chacun d'eux est autoadjoint, donc $s$ est autoadjointe.

**Exercice 20 (Endomorphismes anti-adjoints).** ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose dans cet exercice que $u$ est antiadjoint ou antisymétrique, i.e. $u^* = -u$.

**1.** Que peut-on dire de la matrice de $u$ ?

De même que précédemment, on peut dire que la matrice de $u$ est antisymétrique.

**2.** Que peut-on dire de l'image et du noyau de $u$ ?

On a $\ker(u) = \mathrm{Im}(u^*)^\perp$, mais $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Im}(-u) = \mathrm{Im}(u)$, donc l'image et le noyau de $u$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

**3.** Montrer que $u$ est antiadjoint si et seulement si $\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$.

- Supposons que $u$ est antiadjoint. Soit $x$ dans $E$. Alors $(u(x)|x) = (x|u^*(x)) = (x| - u(x)) = -(u(x)|x)$, donc $(u(x)|x) = 0$.

- Supposons que pour tout $x$ dans $E$, $(u(x)|x) = 0$. Soient $x$ et $y$ dans $E$. Alors

$$
\begin{aligned}
(u^*(x) + u(x)|y) &= (u^*(x)|y) + (u(x)|y) \\
&= (x|u(y)) + (u(x)|y) = (u(x+y)|x+y) - (u(x)|x) - (u(y)|y) = 0.
\end{aligned}
$$

Comme l'égalité est vraie pour tous $x$ et $y$, on en déduit que $u^* + u = 0$, donc que $u^* = -u$, donc que $u$ est antiadjoint.

---

**4. (a)** Montrer que pour tout $x$ et $\lambda$ dans $\mathbb{R}$ tels que $u(x) = \lambda x$, on a $\lambda = 0$ ou $x = 0$.

Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Alors $(u(x)|x) = \lambda \|x\|^2$, mais $(u(x)|x) = 0$, donc $\lambda \|x\|^2 = 0$. Or $x \neq 0$, donc $\lambda = 0$.

---

**(b)** Soit $v$ l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par $u$ (i.e. la restriction de $u$ à $\mathrm{Im}(u)$, à valeurs dans $\mathrm{Im}(u)$). Montrer que pour tout $\lambda$ réel, $\det(v - \lambda \mathrm{Id}) \neq 0$.

Soit $x \in \ker(v - \lambda \mathrm{Id})$. Alors $x \in \mathrm{Im}(u)$ et $u(x) = \lambda x$. Par la question précédente, $\lambda = 0$, donc $x \in \ker(u)$. Mais $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux. Donc $x = 0$. Donc pour tout $\lambda$, $v - \lambda \mathrm{Id}$ est inversible, donc pour tout $\lambda$, $v - \lambda \mathrm{Id}$ est non nul.

---

**(c)** En déduire que le rang de $u$ est pair.

En particulier, pour $\lambda = 0$, $\det(v) \neq 0$. Or, si on avait $\mathrm{rg}(u)$ impair, $v$ serait un endomorphisme antisymétrique en dimension impaire. On aurait donc la matrice $M$ de $v$ antisymétrique, donc $\det(v) = \det(M) = \det({}^{\mathrm{t}}M) = \det(-M) = (-1)^{\mathrm{rg}(u)}\det(M)$, donc $\det(v) = 0$, contradiction. Donc $\mathrm{rg}(u)$ est pair.

---

# 4 Isométries d'un espace vectoriel

**Exercice 21.** Caractériser les endomorphismes représentés par les matrices suivantes

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

---

On remarque que $A \operatorname{tr} A = \mathrm{I}_2$, donc $A$ est une isométrie. De plus, $\det(A) = 1$ donc $A$ est une isométrie directe. Donc $A$ est une rotation. On détermine un angle $\theta$ de cette rotation. On sait que $\frac{3}{5} = \cos(\theta)$ et $-\frac{4}{5} = \sin(\theta)$, donc $\theta = -\mathrm{Arccos}\frac{3}{5}$ (le signe $-$ vient du fait que $\sin(\theta) < 0$).
De même, $B \operatorname{tr} B = \mathrm{I}_2$ donc $B$ est quasi une isométrie. En revanche, $\det(B) = -1$, donc $B$ est indirecte, donc $B$ est une symétrie. On détermine son axe en résolvant l'équation $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Cett équation équivaut à $\begin{cases} 5x + 12y = 13x \\ 12x - 5y = 13y \end{cases}$. Or,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 5x + 12y = 13x \\ 12x - 5y = 13y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 12y = 0 \\ 12x - 18y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \{2x - 3y = 0
\end{aligned}$$

Donc $B$ est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $2x - 3y = 0$.

---

**Exercice 22.** ●○○ Soit $E$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto 1,\ f_2 : x \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi x),\ f_3 : x \mapsto \sqrt{2}\sin(2\pi x).$$

**1.** Montrer que l'expression $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur $E$.

C'est du cours !

**2.** Soient $x \in \mathbb{R}$, et $\varphi_x : f \mapsto g$, où $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x-t)$. Montrer que $\varphi_x$ est une isométrie vectorielle de $E$.

On va montrer que $(f_1, f_2, f_3)$ constitue bien une base orthonormée, et que $\varphi_x$ transforme $(f_1, f_2, f_3)$ en une BON.
Déjà, $\int_{-1}^1 f_1(t)f_2(t)dt = \int_{-1}^1 \sqrt{2}\cos(2\pi x)dt = 0$, de même $\int_{-1}^1 f_1(t)f_3(t)dt = 0$, et

$$\int_{-1}^1 f_2(t)f_3(t)dt = 2\int_{-1}^1 \cos(2\pi t)\sin(2\pi t)dt = \int_{-1}^1 \sin(2\pi t)dt = 0.$$

Ensuite, $\int_{-1}^1 f_1(t)^2dt = 1$, $\int_{-1}^1 f_2(t)^2dt = \int_{-1}^1 2\cos^2(2\pi t)dt = \int_{-1}^1 1+\cos(4\pi t)dt = 1$, et $\int_{-1}^1 f_3(t)^2dt = 1$.

On vérifie ensuite que $\varphi_x$ est orthogonale. $\varphi_x(f_1)(t) = 1 = f_1(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ dans la base originale,

$$\varphi_x(f_2)(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi(x-t)) = \sqrt{2}\cos(2\pi x)\cos(2\pi t) + \sqrt{2}\sin(2\pi x)\sin(2\pi t) = \begin{pmatrix}0\\ \cos(2\pi x)\\ \sin(2\pi x)\end{pmatrix},$$

et $\varphi_x(f_3)(t) = \sqrt{2}\sin(2\pi(t-x)) = \sqrt{2}\sin(2\pi t)\cos(2\pi x) - \sqrt{2}\cos(2\pi t)\sin(2\pi x) = \begin{pmatrix}0\\ -\sin(2\pi x)\\ \cos(2\pi x)\end{pmatrix}$.

En lisant les coordonnées, on remarque immédiatement que ces vecteurs forment une BON, donc

$\varphi_x$ est bien orthogonale.

**Remarque : on pouvait très bien résoudre l'exercice en vérifiant que $(f_1, f_2, f_3)$ constitue une BON et en écrivant ensuite la matrice de $\varphi_x$ dans la BON $(f_1, f_2, f_3)$ (c'est peut-être plus simple).**

---

**Exercice 23.** ●●○ Soit $f$ une isométrie involutive (i.e. tel que $f \circ f = \mathrm{Id}$) d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$.

**1.** Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

---

Comme $f$ est une involution, $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires (c'est du cours, mais savoir le redémontrer). Montrons simplement qu'ils sont orthogonaux. Soit $x$ dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $y$ dans $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \langle f(x), -f(y)\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle = -\langle x, y\rangle\,,$$

la dernière égalité venant du fait que $f$ est une isométrie. Donc $\langle x, y\rangle = 0$ donc $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

---

**2.** Montrer qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de $E$ tels que

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = e_k \text{ et } \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_k) = -e_k.$$

---

Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une BON de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une BON de $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base par supplémentarité de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$, et c'est une BON par orthogonalité de ces deux espaces. Cette base vérifie la propriété désirée !

**3.** En déduire que $f$ est la composée de $k$ réflexions de $E$, où $k \leqslant n$.

Soit alors pour tout $k$ $s_k$ la réflexion par rapport à l'hyperplan $\mathrm{Vect}(e_k)^{\perp}$. Alors $s_k(e_j) = e_j$ si $j \neq k$ et $s_k(e_k) = -e_k$. Alors, en écrivant matriciellement les choses par exemple, on remarque que $f = s_{p+1} \circ \cdots \circ s_n$.

**Exercice 24.** ●●○ Soient $E$ un espace euclidien de dimension $n$ et $v \in \mathscr{L}(E)$.

**1.** Montrer que $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i), e_i \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$ choisie.

Soit $A$ la matrice de $v$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. La coordonnée de $x$ selon $e_i$ est $\langle x, e_i \rangle$. Alors $\langle v(e_i), e_i \rangle = a_{ii}$. Donc $S = \mathrm{tr}(A)$, quantité invariante par similitude. Donc si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une autre BON et $B$ est la matrice de $v$ dans cette base, on a $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{tr}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v(\varepsilon_i), \varepsilon_i \rangle$. D'où le résultat.

**2.** Montrer que $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v(e_i), f_j \rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ choisies.

On remarque que si $A$ est la matrice de $v$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ au départ et $(f_1 \ldots, f_n)$ à l'arrivée, alors $T = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}A)$. Soient $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ deux autres bases orthonormées, $P$ la matrice de passage de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $Q$ celle de $(f_1, \ldots, f_n)$ à $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Alors $P$ et $Q$ sont orthogonales. Donc si $B$ est la matrice de $v$ dans $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ au départ et $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ à l'arrivée, on a $B = Q^{-1}AP = {}^{\mathrm{t}}QAP$ donc $A = QB^{\mathrm{t}}P$ donc $A^{\mathrm{t}}A = QB^{\mathrm{t}}P^{\mathrm{t}}(QB^{\mathrm{t}}P) = QB^{\mathrm{t}}PP^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}Q = QB^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}Q$. Donc $T = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{tr}(B^{\mathrm{t}}B)$. D'où le résultat.

**3.** Calculer la valeur de $T$ lorsque $v$ est un projecteur orthogonal de rang $r$.

Si $v$ est un projecteur orthogonal de rang $r$, on prend une base adaptée à $\ker(v)$ et à $\mathrm{Im}(v)$, et on trouve $T = r$.

**Exercice 25** (Équation $\mathrm{Com}(M) = M$). ●●◐

On cherche à résoudre l'équation $\mathrm{Com}(M) = M$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.** Résoudre l'équation pour $n = 2$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Com}(M) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, donc l'équation se réécrit $a = d$, $b = -c$, $c = -b$, donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

**2.** Résolution générale.

**(i)** Soit $M$ telle que $\mathrm{Com}(M) = M$.

- Calculer $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}MM)$, puis déterminer le signe de $\det(M)$.

Comme $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ est un produit scalaire, $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}MM)$ est une norme au carré, donc positive. De plus, ${}^{\mathrm{t}}MM = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)M = \det(M)\mathrm{I}_n$, donc $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}MM) = n\det(M)$. Donc $\det(M) \geqslant 0$.

- Montrer que $\det(M)$ ne peut prendre que deux valeurs au plus.

Ensuite, ${}^{\mathrm{t}}MM = \det(M)\mathrm{I}_n$, donc en prenant le déterminant, $\det({}^{\mathrm{t}}MM) = \det(\det(M)\mathrm{I}_n) = \det(M)^n$, donc $\det(M)^2 = \det(M)^n$. On suppose $n > 2$, donc $\det(M) = 0$ ou $\det(M)^{n-2} = 1$. Comme $\det(M) \geqslant 0$, $\det(M) = 0$ ou $\det(M) = 1$.

**(ii)** Faire la synthèse.

Si $\det(M) = 0$, $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}MM) = 0$, donc $M = 0$. Sinon $\det(M) = 1$, i.e. ${}^{\mathrm{t}}MM = \mathrm{I}_n$, i.e. $M$ est orthogonale directe. Réciproquement si $M$ est orthogonale directe, $M^{-1} = {}^{\mathrm{t}}M$. Or $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(M)$. D'où le résultat.

**Exercice 26** (Norme triple associée à une application linéaire). ●●◐

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien.

**1.** **(i)** Étant donné un endomorphisme $u$ de $E$, montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant M\|x\|$.

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une BON de $E$, $x \in E$. Alors

$$\|u(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i u(e_i)\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, \|u(e_i)\| \,.$$

On pose alors $m = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|u(e_i)\|$. Alors $\|u(x)\| \leqslant m\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$. Enfin, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}1} = n\|x\|$. D'où $\|u(x)\| \leqslant mn\|x\|$, d'où le résultat souhaité avec $M = mn$.

**(ii)** En déduire l'existence de $\inf\{M \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{E}, \|u(x)\| \leqslant M\|x\|\}$. On appellera ce réel « norme triple de $u$ », ou « norme subordonnée à $\|\cdot\|$ » , et on la notera $|||u|||$.

La partie $\{M \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{E}, \|u(x)\| \leqslant \|x\|\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, minorée, donc admet une borne inférieure.

**2.** Que vaut $|||u|||$ si $u$ est une isométrie ?

Si $u$ est une isométrie, pour tout $x$, $\|u(x)\| = \|x\|$, donc $|||u||| = 1$.

**3.** Soit $p$ un projecteur de $E$. Montrer que $|||p||| \geqslant 1$ avec égalité si, et seulement si $p$ est un projecteur orthogonal.

---

Déjà, si $p$ est un projecteur sur $F$ et $x \in F$, $p(x) = x$ donc nécessairement $|||p||| \geqslant 1$. Ensuite, pour un projecteur orthogonal, montrons que $|||p||| = 1$. Soit $F = \mathrm{Im}(p)$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $F$. Alors si $x \in E$, $\|p(x)\| = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leqslant \|x\|^2$, donc $|||p||| \leqslant 1$ d'où $|||p||| = 1$. Enfin, si $|||p||| = 1$, on a pour tout $x$, $\|x\|^2 - \|p(x)\|^2 \geqslant 0$, i.e. $\langle x + p(x), x - p(x) \rangle \geqslant 0$. Donc si $y \in \ker(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$, en prenant $x = y + z$ il vient $\langle y + 2z, y \rangle \geqslant 0$ , i.e $\|y\|^2 + 2 \|\langle\| y, z \rangle \geqslant 0$. En prenant $x' = ty + z$ avec $t \in \mathbb{R}$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$, $t^2 \|y\|^2 + 2t \langle y, z \rangle \geqslant 0$. Donc le discriminant de ce polynôme est négatif, i.e. $\langle y, z \rangle^2 \leqslant 0$, donc $\langle y, z \rangle = 0$. D'où $p$ est orthogonal.

---

DEBUT ↖