TD25
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel euclidien E. Démontrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 2. ●●○ Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Soit u un endomorphisme de E. On définit l'application u^* de E dans E par

$$\forall x \in E,\ u^*(x) = \sum_{i=1}^{n} (x|u(e_i))e_i.$$

1. Montrer que u^* est un endomorphisme de E. On l'appelle *adjoint* de u.
2. **(i)** Soit x dans E. Montrer que pour tous x et y de E, $(u^*(x)|y) = (x|u(y))$.
   (ii) Montrer que la propriété précédente caractérise l'adjoint, i.e. que si $v \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\forall (x,y) \in E^2,\ (v(x)|y) = (x|u(y))$, alors $v = u^*$.
   (iii) Si $u \in \mathscr{L}(E)$, déterminer $(u^*)^*$.
3. Montrer que la définition de u^* ne dépend pas de la base orthonormale choisie.
4. Si M est la matrice de u dans $\mathscr{B}$, exprimer la matrice de u^* dans $\mathscr{B}$ en fonction de M.
5. Montrer que $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$ et que $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^{\perp}$.

Exercice 3. ●○○ Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'expression $(A|B) = \mathrm{tr}({}^{t}AB)$ munit E d'un produit scalaire.
2. Soient $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ les sous-espaces vectoriels respectivement constitués des matrices symétriques et antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux.
3. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de E. Exprimer, à l'aide des coefficients $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$,

$$\min_{M=(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-m_{ij})^2.$$

Exercice 4. *Famille de polynômes orthogonaux*

1. Montrer que $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\cdot Q(t)\cdot dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, .
2. Démontrer qu'il existe une famille (Q_n) de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $\deg(Q_n) = n$.
3. Montrer que Q_n a la même parité que n $(Q_n(-x) = (-1)^n \cdot Q_n(x))$.
4. Montrer que Q_n admet n racines distinctes, toutes entre -1 et 1.

Exercice 5. ●●◐ Soit E un espace euclidien de dimension n, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

1. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base orthonormée de E. Démontrer que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ satisfait $A \times A^{\top} = \mathrm{I}_n$. En déduire la valeur de $\det(A)$.
2. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille orthogonale de E. Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(u_1,\dots,u_n)| = \|u_1\|\dots\|u_n\|$.
3. Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille quelconque de E. Montrer que $|\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)| \leqslant \|x_1\|\dots\|x_n\|$.

Exercice 6 (Matrice et déterminant de Gram)**.** ●●● Soient $(x_1,\dots,x_p)$ un système de p vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Soit $\mathcal{E}$ une base orthonormée de E. On appelle matrice de Gram associée à

$(x_1, \dots, x_p)$ la matrice

$$\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_p, x_1\rangle & \langle x_p, x_2\rangle & \cdots & \langle x_p, x_p\rangle \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p)$ est une matrice symétrique.

On appelle déterminant de Gram de $(x_1, \dots, x_p)$ la quantité $G(x_1, \dots, x_p) = \det(\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p))$.

2. **(i)** Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = 0$ si et seulement si $(x_1, \dots, x_p)$ est lié.

(ii) Soit M la matrice de $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base $\mathcal{E}$. Montrer que $\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p) = M^\top M$.

(iii) Montrer que lorsque $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est libre, on a $G(x_1, \dots, x_p) > 0$.

3. En orthonormalisant le système $(x_1, \dots, x_p)$, montrer que

$$G(x_1, \dots, x_p) \leqslant \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_p\|^2 .$$

4. On suppose le système $(x_1, \dots, x_p)$ libre. Soit z le projeté orthogonal d'un vecteur y sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $\|y - z\|^2 = \dfrac{G(y, x_1, \dots, x_p)}{G(x_1, x_2, \dots, x_p)}$.

Stratégie.

- commencer par deux petits exercices : 7, 12.
- utiliser ensuite Cauchy-Schwarz : 9.
- faire un exercice sur les endomorphismes : ou bien 14 dans sa version plus simple, ou bien 20 pour une version plus corsée.

2 Notion de produit scalaire, d'orthogonalité

Exercice 7. ●○○ Vérifier que les applications suivantes sont des produits scalaires sur les espaces mentionnés

(i) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

(ii) $E = \mathscr{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, $(f|g) = f(a)g(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)g'(t)dt$.

Exercice 8 (Un produit scalaire original). ●●◐ Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On considère une suite $(a_n)_n$ à valeurs dans $[0, 1]$. On pose alors $(f \mid g) = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k} f(a_k)\, g(a_k)$

1. Justifier que cette quantité est bien définie.

2. Montrer que c'est un produit scalaire si et seulement si $(a_n)_n$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 9. ●●○ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{(n + 1)2^n}$.

Exercice 10. ●●○

Déterminer le minimum, pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, de la quantité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exercice 11. ●●○

Soient E un eve et x, y dans E. Développer l'expression

$$\left\| \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle\, y \right\|^2$$

et retrouver une inégalité célèbre.

Exercice 12. ●◐○ Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux parties de E. Démontrer que $(F \cup G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

Exercice 13 (Calculs explicites)**.** ●◐○ On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$.

3. Déterminer la distance de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ au plan d'équation $x - y + z = 0$.

Exercice 14. ●◐○ Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer l'équivalence suivante

$$\big(\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0\big) \Leftrightarrow \big(\forall (x,y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle\big).$$

Exercice 15 (Quelques contre-exemples en dimension infinie)**.** ●●◐ Soit $E = \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$, muni du produit sacalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.

1. Soit $H = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Montrer que $H^\perp = \{0\}$, et conclure que $(H^\perp)^\perp \neq H$.

2. Soit

$$A = \{f \in E,\ \forall t \in [-1, 0],\ f(t) = 0\}$$
$$B = \{f \in E,\ \forall t \in [0, 1],\ f(t) = 0\}.$$

Démontrer que $A^\perp = B$, que $B^\perp = A$, mais que $(A \cap B)^\perp \neq A^\perp + B^\perp$.

Exercice 16. ●●◐ Sur $E = \mathbb{E}_n[X]$, on définit $(P|Q) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

2. **(i)** On considère pour $k \in [\![0, n]\!]$ le polynôme U_k défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ U_k(x) = \dfrac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right)$. Montrer que $(U_0, \dots, U_n)$ est une base orthogonale de E.

(ii) Calculer à l'aide d'un changement de variables $x = \cos(t)$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)^k dx$. On utilisera la formule (non au programme, mais vue 2 fois en DM) des intégrales de Wallis, et on contrôlera qu'on sait calculer cette formule.

(iii) En déduire une base orthonormale, formée de vecteurs colinéaires et de même sens que $U_0, \dots, U_n$.

3 Endomorphismes des espaces euclidiens

Exercice 17 (Similitudes)**.** ●●○ Soit E un espace euclidien, $u \in GL(E)$. On dit que u est une similitude de E s'il existe λ dans $\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Démontrer que si u est une similitude, alors pour tous x et y dans E, $\langle u(x), u(y)\rangle = \lambda^2 \langle x, y\rangle$. En déduire que $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$.

Réciproquement, on suppose que u est un endomorphisme préservant l'orthogonalité, i.e. que pour tous x et y dans E, $x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y)$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

2. En considérant $e_1 + e_2$ et $e_1 - e_2$, démontrer que $\|u(e_1)\| = \|u(e_2)\|$.

3. En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$.

Exercice 18 (Isométries)**.** ●●○ Soit E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est une isométrie si pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \|x\|$.

1. Démontrer que l'ensemble des isométries constitue un sous-groupe de $GL(E)$.

2. Démontrer que u est une isométrie si, et seulement si pour tous x et y de E, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

3. Démontrer que u est une isométrie si et seulement si la matrice A de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ vérifie $A \times A^\top = \mathrm{I}_n$.

4. Vérifier que les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ sont des isométries de $\mathbb{R}^2$. Quelle transformation géométrique représentent-elles ?

Exercice 19 (Endomorphismes symétriques). ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E. On suppose dans cet exercice que u est autoadjoint (on dit parfois « symétrique »), c'est-à-dire que $u^* = u$.

1. Que peut-on dire de la matrice de u dans $\mathscr{B}$?

2. Que peut-on dire de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$?

3. *Caractérisation des symétries et projecteurs orthogonaux.*

   (a) Montrer qu'un projecteur de E est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.

   (b) Montrer que symétrie de E est autoadjointe si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 20 (Endomorphismes anti-adjoints). ●●○ Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme de E. On suppose dans cet exercice que u est antiadjoint ou antisymétrique, i.e. $u^* = -u$.

1. Que peut-on dire de la matrice de u ?

2. Que peut-on dire de l'image et du noyau de u ?

3. Montrer que u est antiadjoint si et seulement si $\forall x \in E,\ (u(x)|x) = 0$.

4. **(a)** Montrer que pour tout x et λ dans $\mathbb{R}$ tels que $u(x) = \lambda x$, on a $\lambda = 0$ ou $x = 0$.

   (b) Soit v l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(u)$ induit par u (i.e. la restriction de u à $\mathrm{Im}(u)$, à valeurs dans $\mathrm{Im}(u)$). Montrer que pour tout λ réel, $\det(v - \lambda\mathrm{Id}) \neq 0$.

   (c) En déduire que le rang de u est pair.

4 Isométries d'un espace vectoriel

Exercice 21. Caractériser les endomorphismes représentés par les matrices suivantes

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Exercice 22. ●○○ Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par les trois fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto 1,\ f_2 : x \mapsto \sqrt{2}\cos(2\pi x),\ f_3 : x \mapsto \sqrt{2}\sin(2\pi x).$$

1. Montrer que l'expression $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soient $x \in \mathbb{R}$, et $\varphi_x : f \mapsto g$, où $\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = f(x-t)$. Montrer que φ_x est une isométrie vectorielle de E.

Exercice 23. ●●○ Soit f une isométrie involutive (i.e. tel que $f \circ f = \mathrm{Id}$) d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$ sont deux supplémentaires orthogonaux.

2. Montrer qu'il existe $p \in [\![1, n]\!]$ et une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de E tels que

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ f(e_k) = e_k \text{ et } \forall k \in [\![p+1, n]\!],\ f(e_k) = -e_k.$$

3. En déduire que f est la composée de k réflexions de E, où $k \leqslant n$.

Exercice 24. ●●○ Soient E un espace euclidien de dimension n et $v \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $S = \sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i), e_i \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E choisie.

2. Montrer que $T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v(e_i), f_j \rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ choisies.

3. Calculer la valeur de T lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.

Exercice 25 (Équation $\mathrm{Com}(M) = M$)**.** ●●◐
On cherche à résoudre l'équation $\mathrm{Com}(M) = M$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Résoudre l'équation pour $n = 2$.

2. Résolution générale.

(i) Soit M telle que $\mathrm{Com}(M) = M$.

- Calculer $\mathrm{tr}({}^{t}MM)$, puis déterminer le signe de $\det(M)$.
- Montrer que $\det(M)$ ne peut prendre que deux valeurs au plus.

(ii) Faire la synthèse.

Exercice 26 (Norme triple associée à une application linéaire)**.** ●●◐
Soit E un espace vectoriel euclidien.

1. **(i)** Étant donné un endomorphisme u de E, montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant M \|x\|$.

(ii) En déduire l'existence de $\inf\{M \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{E}, \|u(x)\| \leqslant M \|x\|\}$. On appellera ce réel « norme triple de u », ou « norme subordonnée à $\|\cdot\|$ » , et on la notera $|||u|||$.

2. Que vaut $|||u|||$ si u est une isométrie ?

3. Soit p un projecteur de E. Montrer que $|||p||| \geqslant 1$ avec égalité si, et seulement si p est un projecteur orthogonal.

Indications.

2 **1.** Simples vérifications.

2. **(i)** Attention à ne pas se mélanger entre les réels et les vecteurs ! Écrire soigneusement les choses et penser que $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$.

(ii) Décomposer y sur la base (e_j), et utiliser le fait que $(u^*(x)|e_j) = (x|u(e_j))$.

(iii) Prendre $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tous x et y dans E, $(v(x)|y) = (x|u(y))$ et démontrer que $v - u^* = 0$.

(iv) Utiliser la question précédente.

3. Vérifier que toutes les questions précédentes fonctionnent si on change de base.

4. Démontrer qu'il s'agit de ${}^{t}M$.

5. Pour la première égalité, procéder par double inclusion. Pour la seconde, utiliser une inclusion et un argument de dimension.

3 **1.** Question de cours !

2. Deux choix : démontrer l'orthogonalité, puis la supplémentarité, ou bien l'orthogonalité, puis l'égalité des dimensions !

3. Utiliser une projection orthogonale sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (propriété de minimisation de la distance).

?? Démontrer, dans l'ordre :

— la dernière inégalité à l'aide du produit scalaire canonique $\boxed{\text{sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ et à l'aide de Cauchy-Schwarz et de la matrice J constitutée de 1.

— l'inégalité centrale en utilisant que tous les coefficients sont de valeur absolue $\leqslant 1$, donc sont supérieurs à leur carré.

— l'inégalité de gauche à l'aide du produit scalaire canonique $\boxed{\text{sur } \mathbb{R}^n}$, et en considérant les colonnes de A.

5 Essayer de visualiser l'exercice en termes de volume.

1. Utiliser que la matrice de $(u_1, \dots, u_n)$ dans une BON est orthogonale.

2. Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt à $(x_1, \dots, x_n)$.

6 **1.** Vient de la symétrie du produit scalaire.

2. **(i)**

(ii) Revenir aux coefficients.

(iii) Utiliser que $\det(\mathscr{G}(x_1, \dots, x_p)) = \det({}^{\mathrm{t}}MM)$.

3. Utiliser l'inégalité d'Hadamard.

4. Si p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, la distance cherchée est $\|y - p(y)\|$. Puis démontrer que

$$G(x_1, \dots, x_p, y) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & \langle x_1, p(x)\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle x_n, p(x)\rangle \\ \langle p(x), x_1\rangle & \langle p(x), x_2\rangle & \cdots & \langle p(x), x_n\rangle & \|p(x)\|^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_n\rangle & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \langle x_n, x_2\rangle & \cdots & \langle x_n, x_n\rangle & 0 \\ \langle p(x), x_1\rangle & \langle p(x), x_2\rangle & \cdots & \langle p(x), x_n\rangle & \|u\|^2 \end{vmatrix}.$$

7 Je donne des indications uniquement pour le caractère défini.

(i) Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

(ii) Utiliser le fait que l'intégrale du carré d'une fonction continue est nulle ssi cette fonction est nulle.

9 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

10 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et le cas d'égalité.

11 La difficulté réside dans le fait de savoir qui est un vecteur, qui est un scalaire. On doit retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

12 Démontrer le résultat par double inclusion.

14 Pour le sens direct, utiliser que $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$, puis développer. Le sens réciproque est évident.

15 **1.** Prendre, $f \in H^\perp$, g qui coïncide avec f sauf éventuellement autour de 0, de sorte que fg soit de signe constant.

2. Si $f \in A^\perp$, prendre $g : t \mapsto tf(t)$ sur $[0, 1]$ et nulle sinon.
Ensuite, vérifier que $A \cap B = \{0\}$, donc $(A \cap B)^\perp = E$, mais que $A^\perp + B^\perp \neq E$.

16 **1.** C'est du cours.

2. **(i)** Utiliser que toutes les dérivées j-èmes, avec $j \leqslant k$, de $(x^2 - 1)^k$, sont nulles en 1 et en -1, et faire une récurrence.

(ii) Poser $x = \cos(t)$.

(iii) Utilser la récurrence pour calculer la norme de P_k.

19 Utiliser l'exercice 2, et

1. S'intéresser au caractère symétrique ou antisymétrique de la matrice.

2. Montrer que l'image et le noyau sont supplémentaires orthogonaux.

3. **(a)** Faire une double implication.

(b) Montrer que si une symétrie est autoadjointe, alors $\ker(s - \mathrm{Id}) \perp \ker(s + \mathrm{Id})$. Pour la réciproque, utiliser qu'un projecteur orthogonal est autoadjoint.

20 Utiliser l'exercice 2, et

1. Que peut-on dire de la matrice de u ?

2. Montrer que ce sont des supplémentaires orthogonaux.

3. Pour le sens réciproque, utiliser $(u(x + y)|x + y)$.

4. **(a)** Montrer que $\lambda \|x\|^2 = 0$.

(b) Montrer que pour tout λ, $v - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible, donc pour tout λ, $v - \lambda\mathrm{Id}$ est non nul.

(c) Montrer que, pour $\lambda = 0$, $\det(v) \neq 0$, et montrer qu'une matrice antisymétrique en dimension impaire n'est pas inversible.