

MSPI 1

Mathématiques

DS 09 (4 H 00)

Samedi 10 mai – 8h-12h

Le sujet comporte 6 pages avec la page de garde. Il comprend deux exercices et un problème. Les deux exercices sont indépendants du problème.

Il est vivement conseillé de parcourir des yeux l'ensemble du sujet avant d'entamer son traitement. Cela aide à entrer dedans tout en faisant baisser l'adrénaline, et à cerner la situation globale pour préméditer l'enchaînement des tâches attendues.

Consignes aux aspirants aux grandes écoles :

1. Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
2. **Aucune couleur** n'est autorisée à l'exception du bleu et du noir.
3. Il est demandé de **numéroter** les écrits **page par page en bas à droite**.
4. Il est demandé d'indiquer les numéros ou étiquettes des questions dans la **marge gauche**.
5. Il est demandé de mettre en relief **les arguments capitaux et les résultats**.
6. Toute **réponse non mise en évidence** sera ignorée.
7. Il est demandé d'indiquer **toutes les questions dans leur ordre** par leurs étiquettes, même les questions dont les traitements sont mis en suspens. On indiquera aussi les exercices et problèmes dans l'ordre de l'énoncé.
8. Il est permis d'admettre le résultat d'une question en écrivant "**Résultat admis.**" sur la copie, puis de s'en servir par la suite. On indiquera entre parenthèses **la page où la question est traitée**, le cas échéant.
9. Que le candidat qui trouve ce qui lui semble être une erreur d'énoncé l'indique sur sa copie.
10. Une réponse fausse sans calculs intermédiaires est nulle.
11. Une **chose nommée non définie** par celui qui la nomme annule tout raisonnement se rapportant à cette chose.
12. Les **abréviations** non définies ou grossières sont interdites.

Exercice 1 (Sous-espaces de coordonnées).

Soit un entier naturel n non nul ; un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On appelle sous-espaces de coordonnées de E , relativement à la base $\mathcal{B}$, les sous-espaces engendrés par les familles $(e_i)_{i \in I}$ pour I parcourant l'ensemble $\mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble de ces sous-espaces.

1. Figurer tous les sous-espaces de coordonnées de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique.
2. Montrer que l'application suivante est bijective : $\Phi : I \in \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) \rightarrow \mathcal{V}, I \mapsto \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$.
3. En déduire que les sous-espaces de coordonnées relativement à la base $\mathcal{B}$ sont en nombre fini et préciser leur nombre.

Exercice 2 (Inversion d'une matrice à paramètres).

Soit trois complexes distincts a, b, c . Déterminer si l'application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ canoniquement associée à la matrice M ci-après est inversible, et l'inverser le cas échéant :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}. \quad \text{On identifiera } \mathbb{C}^3 \text{ à } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

Problème I. Racines carrées de $P \mapsto \lambda P + P'$

Pour tout espace vectoriel réel V , on note $\mathcal{L}(V)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V , et pour tout $f \in \mathcal{L}(V)$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \text{id}_V$.

Soit un entier naturel n . On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degrés inférieurs à n . On note alors D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$; on note D_n l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$D : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{cases} \quad \text{et} \quad D_n : \begin{cases} E_n \longrightarrow E_n \\ P \longmapsto P' \end{cases}.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'objectif du problème est de déterminer, en fonction de la valeur du paramètre réel λ , s'il existe au moins un endomorphisme g de E (respectivement de E_n) tel que $g^2 = \lambda \text{id}_E + D$ (respectivement $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$).

Partie I-A. Préliminaires

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et f un endomorphisme de V .

1. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes f^k , $k = 0, 1, 2, \dots$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels emboîtés :

$$\text{Ker}(f^0) \subset \text{Ker}(f^1) \subset \text{Ker}(f^2) \subset \dots \subset \text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}) \subset \dots$$

On l'appelle *suite des noyaux itérés* de f .

Soit $p \in \mathbb{N}$.

2. On suppose que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$. Démontrer que : $\forall q \geq p, \text{Ker}(f^q) = \text{Ker}(f^{q+1})$.
3. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier $k \geq p$, $\text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p)$.

On suppose que l'espace vectoriel V est de dimension finie égale à n .

4. En déduire que la suite des dimensions des noyaux itérés de f est constante à partir d'un rang $p \leq n$, puis que la suite des noyaux itérés de f est constante à partir de ce rang p . En particulier les noyaux $\text{Ker}(f^n)$ et $\text{Ker}(f^{n+1})$ sont égaux.
5. Démontrer que s'il existe au moins un entier $q \geq 1$ tel que $f^q = 0_{\mathcal{L}(V)}$, alors $f^n = 0_{\mathcal{L}(V)}$. L'endomorphisme f est alors dit nilpotent.
6. Vérifier que D_n est nilpotent. Expliciter la suite des noyaux itérés $(\text{Ker}(D_n^\ell))_{0 \leq \ell \leq n+1}$.
7. Soit P un polynôme de degré n . Démontrer que $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^n(P))$ est une base de $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Partie I-B. Premiers résultats

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple. On note toujours $E = \mathbb{R}[X]$ et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

I-B-1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

8. Soit $g \in \mathcal{L}(E_n)$. On suppose que $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$. Démontrer que g commute avec D_n .

9. En déduire que E_p est **stable** par g , i.e. pour tout Q dans E_p , $g(Q) \in E_p$. On pourra utiliser la question 6.

On note $g_p : \begin{cases} E_p \longrightarrow E_p \\ P \longmapsto g(P) \end{cases}$.

10. Démontrer la relation : $(g_p)^2 = \lambda \text{id}_{E_p} + D_p$.

On considère g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$. On suppose que

$$g^2 = \lambda \text{id}_E + D.$$

On admet : que g commute avec D ; que pour tout p dans $\mathbb{N}$, E_p est stable par g ; et qu'en notant $g_p : E_p \rightarrow E_p$, $P \mapsto g(P)$, on a encore $(g_p)^2 = \lambda \text{id}_{E_p} + D_p$.

11. Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension $n + 1$, stable par D .

Démontrer qu'il existe au moins un polynôme P de F de degré maximal d ; puis que pour un tel polynôme P la famille $(P, D(P), D^2(P), \dots, D^d(P))$ est une famille libre d'éléments de F ; puis que $d \leq n$.

En déduire que F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

12. En déduire tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D .
13. Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par g , il est nécessaire et suffisant qu'il soit stable par D .

I-B-2. Une application : le cas $\lambda < 0$

14. Démontrer que s'il existe au moins un élément $g \in \mathcal{L}(E_0)$ tel que $g^2 = \lambda \text{id}_{E_0} + D_0$, alors $\lambda \geq 0$.
15. On suppose que $\lambda < 0$. Déduire des résultats précédents les deux propriétés :

- (a) Il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \lambda \text{id}_E + D$.
- (b) Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n vérifiant $g^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$.

I-B-3. Un exemple pour $n = 2$

16. Soit $h \in \mathcal{L}(E_2)$. Démontrer que h commute avec D_2 si et seulement s'il existe au moins un élément $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a \text{id}_{E_2} + b D_2 + c (D_2)^2$. On pourra utiliser la

question 7.

17. Démontrer que $(\text{id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_2)$. En déduire que si $\lambda > 0$, alors il existe exactement deux endomorphismes $g \in \mathcal{L}(E_2)$ tels que $g^2 = \lambda \text{id}_{E_2} + D_2$.

Partie I-C. Cas $\lambda = 0$

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul, et d'étendre le résultat à une situation plus générale. Dans cette partie l'entier n est supposé supérieur à 1 : $n \geq 1$.

I-C-1. Étude de l'existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$

18. Montrer que, s'il existe au moins un élément $g \in \mathcal{L}(E_n)$ tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et $\dim(\text{Ker}(g^2)) \geq 2$.
19. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$, puis qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

I-C-2. Étude de l'existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $g^k = D^m$.

20. Démontrer que D et g sont surjectifs.
21. Démontrer que pour tout $q \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\text{Ker}(g^q)$ est de dimension finie.
- Soit $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$.
22. Soit $\Phi : \text{Ker}(g^p) \rightarrow E$ l'application définie par : $\forall P \in \text{Ker}(g^p), \Phi(P) = g(P)$.
Démontrer que Φ est une application linéaire à valeurs dans $\text{Ker}(g^{p-1})$. Quel est son noyau ? Démontrer que $\text{Im}(\Phi) = \text{Ker}(g^{p-1})$.
23. Déterminer une relation entre $\dim(\text{Ker}(g^p))$ et $\dim(\text{Ker}(g^{p-1}))$.
En déduire une expression de $\dim(\text{Ker}(g^p))$ en fonction de $\dim(\text{Ker}(g))$.
24. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question 19.

Partie I-D. Existence dans le cas $\lambda > 0$

On suppose que $\lambda > 0$.

25. Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m + o(x^m).$$

Préciser en particulier les valeurs de a_0, a_1, a_2 , et démontrer que pour tout k dans $\llbracket 1, \infty \rrbracket$,

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}} \binom{2k-1}{k}.$$

26. Démontrer que pour tout m dans $\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^m a_k a_{m-k} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

On note $h_n = a_0 \text{id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n$.

27. Démontrer que $h_n^2 = \text{id}_{E_n} + D_n$.

28. En déduire un élément g_n dans $\mathcal{L}(E_n)$ tel que $g_n^2 = \lambda \text{id}_{E_n} + D_n$, puis un élément g de E tel que $g^2 = \lambda \text{id}_E + D$.

DEBUT ↖