FIN ↘

2024–2025
Lycée Pasteur

MSPI 1

Mathématiques

DS 09 (4 H 00)

Samedi 10 mai – 8h-12h

Avec corrigé

Table des matières

Exercice 1 (*Sous-espaces de coordonnées*).

Soit un entier naturel n non nul ; un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On appelle sous-espaces de coordonnées de E, relativement à la base $\mathscr{B}$, les sous-espaces engendrés par les familles $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ pour I parcourant l'ensemble $\mathscr{P}([\![1, n]\!])$ des parties de $[\![1, n]\!]$. On note $\mathcal{V}$ l'ensemble de ces sous-espaces.

1. Figurer tous les sous-espaces de coordonnées de $\mathbb{R}^2$ relativement à la base canonique.

On représente **visuellement** le sous-espace nul par l'origine, les deux droites de coordonnées par la droite des abscisses et la droite des ordonnées, et l'espace tout entier par le plan tout entier.

---

2. Montrer que l'application suivante est bijective : $\Phi : \mathrm{I} \in \mathscr{P}([\![1, n]\!]) \to \mathcal{V},\ \mathrm{I} \mapsto \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$.

1° L'application Φ est surjective par définition de $\mathcal{V}$.

2° Je vais montrer que Φ est injective. Je fixe $I \in \mathscr{P}([\![1, n]\!])$ quelconque.

Je prends $k \in [\![1, n]\!]$ variable. D'abord,

$$e_k \in \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I} \Leftrightarrow k \in I.$$

En effet, je raisonne par disjonction de cas. Je suppose que $k \in I$. Alors $e_k \in \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$, bien sûr ! Je suppose que $k \notin I$. Alors, comme la famille $\mathscr{B}$ est libre, $e_k \notin \mathrm{Vect}(e_i)_{i \in I}$. Ainsi, soit les deux propositions sont vraies, soit les deux propositions sont fausses. D'où l'équivalence.

Ensuite, je prends $J \in \mathscr{P}([\![1, n]\!])$, et je suppose que $\Phi(J) = \Phi(I)$. Alors

$$k \in I \Leftrightarrow e_k \in \Phi(I) \Leftrightarrow e_k \in \Phi(J) \Leftrightarrow k \in J$$

L'élément k étant quelconque, $I = J$.

3° L'application Φ est surjective et injective. Donc elle est bijective.

---

3. En déduire que les sous-espaces de coordonnées relativement à la base $\mathscr{B}$ sont en nombre fini et préciser leur nombre.

D'après ce qui précède, $\mathcal{V}$ est en correspondance un à un avec l'ensemble $\mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$; or ce dernier est fini et de cardinal égal à 2^n ; donc les sous-espaces de coordonnées relativement à la base $\mathscr{B}$ sont en nombre fini égal à 2^n.

Exercice 2 (*Inversion d'une matrice à paramètres*)**.**

Soit trois complexes distincts a, b, c. Déterminer si l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^3)$ canoniquement associé à la matrice M ci-après est inversible, et l'inverser le cas échéant :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix}. \qquad \textit{On identifiera } \mathbb{C}^3 \textit{ à } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C}).$$

1° Qu'on donne $y \in \mathbb{C}^3$ fixé. Je prends $x \in \mathbb{C}^3$ variable. Je note $y = [y_1\ y_2\ y_3]^\top$ et $x = [x_1\ x_2\ x_3]^\top$.

2° Je suppose que

(Obj) $f(x) = y$

Alors

$$\begin{cases} 1x_1 & +1x_2 & +1x_3 = y_1 \\ ax_1 & +bx_2 & +cx_3 = \quad y_2 \\ a^2x_1 & +b^2x_2 & +c^2x_3 = \qquad y_3 \end{cases}$$

3° Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_2[X]$, je note $(P)_k$ son coefficient de degré k, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, par des combinaisons linéaires des lignes du système, j'obtiens :

(O.éq.) $\forall P \in \mathbb{C}_2[X], \quad P(a)x_1 + P(b)x_2 + P(c)x_3 = (P)_0 y_1 + (P)_1 y_2 + (P)_2 y_3$

Je remarque que (O.éq.) implique (Obj).

4° La proposition (O.éq.) traduit l'égalité de deux formes linéaires sur $\mathbb{C}_2[X]$, lesquelles sont égales si, et seulement si, elles coïncident les éléments d'une famille génératrice donnée, quelle qu'elle soit. Ainsi, en choisissant la base de Lagrange associée aux triplet de points distincts $(a\ ,\ b\ ,\ c)$, je déduis de (Obj) que

(CN) $x = g(y)$

et réciproquement ; où

g est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$M' = \begin{bmatrix} \frac{bc}{\alpha} & -\frac{b+c}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{ca}{\beta} & -\frac{c+a}{\beta} & \frac{1}{\beta} \\ \frac{ab}{\gamma} & -\frac{a+b}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} \text{ où } \begin{cases} \alpha = (a-b)(a-c) \\ \beta = (b-c)(b-a) \\ \gamma = (c-a)(c-b) \end{cases}$$

5° Ainsi,

$$\forall y \in \mathbb{C}^3, \forall x \in \mathbb{C}^3, \quad f(x) = y \iff x = g(y).$$

C'est que f est inversible d'inverse g.

3°bis **Autre rédaction :** reprenons depuis le point 3°. Je choisis alors un polynôme $P \in \mathbb{C}_2[X]$ quel qu'il soit. Je note $(P)_k$ son coefficient de degré k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors, par une combinaison linéaire des lignes du système, j'obtiens :

$$P(a)x_1 + P(b)x_2 + P(c)x_3 = (P)_0 y_1 + (P)_1 y_2 + (P)_2 y_3$$

4°bis En substituant à P le polynôme $(X-b)(X-c) = bcX^0 - (b+c)X^1 + 1X^2$, j'obtiens

(CN1) $(a-b)(a-c)x_1 = [bc \quad -(b+c) \quad 1]y$

Puis, en substituant à (a, b, c) le triplet (b, c, a) puis le triplet (c, a, b), j'obtiens

(CN2) $(b-c)(b-a)x_2 = [ca \quad -(c+a) \quad 1]y$

et

(CN3) $(c-a)(c-a)x_3 = [ab \quad -(a+b) \quad 1]y$

5°bis En somme, la conjonction de (CN1), (CN2), et (CN3) s'écrit aussi

(CN) $x = g(y)$

où g est l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice M' définie ci-haut, car a, b, c sont distincts.

6°bis J'ai montré que pour tout $y \in \mathbb{C}^3$ l'équation $f(x) = y$ admet au plus pour solution $x = g(y)$. Donc f est injective. Or f est un endomorphisme en dimension finie ; donc f est surjective. Donc pour tout $y \in \mathbb{C}^3$ l'équation $f(x) = y$ admet pour unique solution $x = g(y)$. D'où f est inversible et $\boxed{f^{-1} = g}$.

Remarques :

▷ La matrice M' s'exprime aussi

$$M' = \frac{1}{V}\begin{bmatrix} (b-c)bc & -(b^2-c^2) & b-c \\ (c-a)ca & -(c^2-a^2) & c-a \\ (a-b)ab & -(a^2-b^2) & a-b \end{bmatrix} \text{ où } \begin{cases} V = -(a-b)(b-c)(c-a) \\ \quad = (c-a)(c-b)(b-a) \\ \quad = (-a+b)(-a+c)(-b+c) \end{cases}$$

▷ Dans la seconde rédaction, on a montré que

$$\forall y \in \mathbb{C}^3, \forall x \in \mathbb{C}^3, \quad f(x) = y \implies x = g(y).$$

Donc, (*par interversion des variables de quantification universelle de conjonction*),

$$\forall x \in \mathbb{C}^3, \forall y \in \mathbb{C}^3, \quad f(x) = y \implies x = g(y).$$

Donc, (*en choisissant* $y = f(x)$),

$$\forall x \in \mathbb{C}^3, \quad x = g(f(x)).$$

Donc f admet un inverse à gauche égal à g. (D'où f est inversible et $\forall y \in \mathbb{C}^3,\ f^{-1}(y) = g(y)$.)

I Racines carrées de $P \mapsto \lambda P + P'$

Pour tout espace vectoriel réel V, on note $\mathscr{L}(V)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de V, et pour tout $f \in \mathscr{L}(V)$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_V$.

Soit un entier naturel n. On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degrés inférieurs à n.

On note alors D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$; on note D_n l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$

$$D : \left| \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ P \longmapsto P' \end{array} \right. \quad \text{et} \quad D_n : \left| \begin{array}{l} E_n \longrightarrow E_n \\ P \longmapsto P' \end{array} \right. .$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'objectif du problème est de déterminer, en fonction de la valeur du paramètre réel λ, s'il existe au moins un endomorphisme g de E (respectivement de E_n) tel que $g^2 = \lambda \mathrm{id}_E + D$ (respectivement $g^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_n} + D_n$).

I-A Préliminaires

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de V.

1. Démontrer que la suite des noyaux des endomorphismes f^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ est une suite croissante de sous-espaces vectoriels emboîtés :

$$\mathrm{Ker}\,(f^0) \subset \mathrm{Ker}\,(f^1) \subset \mathrm{Ker}\,(f^2) \subset \ldots \subset \mathrm{Ker}\,(f^k) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{k+1}) \subset \ldots$$

On l'appelle *suite des noyaux itérés* de f.

Soit $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant \ell$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0$; on applique $f^{\ell-k}$ pour obtenir : $f^\ell(x) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}\,(f^\ell)$. On a montré que $\mathrm{Ker}\,(f^k) \subset \mathrm{Ker}\,(f^\ell)$.

D'où la croissance de la suite.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

2. On suppose que $\mathrm{Ker}\,(f^p) = \mathrm{Ker}\,(f^{p+1})$. Démontrer que : $\forall q \geqslant p,\ \mathrm{Ker}\,(f^q) = \mathrm{Ker}\,(f^{q+1})$.

Soit $q \geqslant p$. Alors $q+1 = p+1+(q-p)$ avec $q-p \in \mathbb{N}$; donc pour tout $x \in V$,

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(f^{q+1}) &\Leftrightarrow f^{q-p}(x) \in \operatorname{Ker}(f^{p+1}) \\ &\Leftrightarrow f^{q-p}(x) \in \operatorname{Ker}(f^{p}) \text{ car } \operatorname{Ker}(f^{p+1}) = \operatorname{Ker}(f^{p}) \\ &\Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(f^{q}). \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(f^{q}) = \operatorname{Ker}(f^{q+1})$.

---

3. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier $k \geqslant p$, $\operatorname{Ker}(f^{k}) = \operatorname{Ker}(f^{p})$.

$\boxed{\text{D}}$ Pour tout $k \in [\![p, \infty[\![$, je pose

$$\mathcal{P}_k : \quad \operatorname{Ker}(f^{k}) = \operatorname{Ker}(f^{p})$$

En vue de montrer par récurrence que

(Obj) $\forall k \in [\![p, \infty[\![, \quad \mathcal{P}_k$.

$\boxed{\text{I}}$ La proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie ! D'où l'initialisation.

$\boxed{\text{H}}$ Soit $k \in [\![p, \infty[\![$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie ($k = p$ p. ex.). Or d'après la question précédente, $\operatorname{Ker}(f^{k+1}) = \operatorname{Ker}(f^{k})$; donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie par transitivité de l'égalité. D'où l'hérédité.

$\boxed{\text{C}}$ Ainsi, en vertu des propriétés de l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leqslant)$, l'objectif est atteint.

On suppose que l'espace vectoriel V est de dimension finie égale à n.

4. En déduire que la suite des dimensions des noyaux itérés de f est constante à partir d'un rang $p \leqslant n$, puis que la suite des noyaux itérés de f est constante à partir de ce rang p. En particulier les noyaux $\operatorname{Ker}(f^{n})$ et $\operatorname{Ker}(f^{n+1})$ sont égaux.

Autre raisonnement, peut-être plus aisé à conduire : par l'absurde.

1° D'abord comme l'espace V est de dimension n, la suite finie $(\dim(\operatorname{Ker}(f^{q})))_{0 \leqslant q \leqslant n+1}$ est une suite de $n+2$ termes à valeurs dans $\{0; 1; \dots; n\}$, ensemble à $n+1$ éléments. Comme $n+2 > n+1$, et que cette suite est croissante, elle n'est pas strictement croissante ; donc on choisit p dans $\{0; 1; \dots; n\}$ tel que $\dim(\operatorname{Ker}(f^{p})) = \dim(\operatorname{Ker}(f^{p+1}))$.

2° Ainsi, d'après les questions qui précèdent, la suite croissante des noyaux itérés de f est constante à partir du rang p d'après la caractérisation dimensionnelle de l'égalité de deux sous-espaces de dimensions finies.

---

5. Démontrer que s'il existe au moins un entier $q \geqslant 1$ tel que $f^q = 0_{\mathscr{L}(V)}$, alors $f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}$. L'endomorphisme f est alors dit nilpotent.

[Voie 1] Supposons qu'il existe au moins un entier $q \geqslant 1$ tel que $f^q = 0_{\mathscr{L}(V)}$. Ainsi, la suite des noyaux itérés de f stationne à la valeur V. Donc, d'après ce qui précède, choisissons un tel entier q dans $[\![1, n]\!]$. Alors $\boxed{f^n = f^{n-q} f^q = 0_{\mathscr{L}(V)}}$.

[Voie 2] Supposons comme ci-avant. Choisissons un tel entier q. Alors $\forall k \in [\![q, \infty[\![,\ f^k = 0_{\mathscr{L}(V)}$. Or, d'après ce qui précède, $\forall k \in [\![n, \infty[\![,\ \operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^k)$. Ainsi, comme $n + q \geqslant n, q$, on a $\operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^{n+q}) = V$. D'où $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}}$.

[Voie 3] Supposons comme ci-avant. Choisissons un tel entier q. Choisissons aussi un rang $p \in [\![0, n]\!]$ à partir duquel la suite $(\operatorname{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante. Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1. Supposons $q \leqslant p$. Alors $f^p = 0_{\mathscr{L}(V)}$. Or $\operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^p)$. D'où $f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}$.

Cas 2. Supposons $q > p$. Alors $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^q) = V$; donc $f^p = 0_{\mathscr{L}(V)}$. D'où, comme ci-avant, $f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}$.

Bilan. En somme, $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}}$.

[Voie 4] Supposons comme ci-avant. Choisissons un tel entier q. Raisonnons par disjonction de cas.

Cas 1. Supposons $q \leqslant n$. Alors $f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}$.

Cas 2. Supposons $q > n$. D'après la question précédente, considérons un rang $p \in [\![0, n]\!]$ à partir duquel la suite $(\operatorname{Ker}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est constante. Comme $n, q \geqslant p$, on a $\operatorname{Ker}(f^n) = \operatorname{Ker}(f^q)$. Or $\operatorname{Ker}(f^q) = V$; donc $\operatorname{Ker}(f^n) = V$. D'où $f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}$.

Bilan. En somme, $\boxed{f^n = 0_{\mathscr{L}(V)}}$.

6. Vérifier que D_n est nilpotent. Expliciter la suite des noyaux itérés $\left(\operatorname{Ker}(D_n^\ell)\right)_{0\leqslant \ell\leqslant n+1}$.

À citer comme une des CMCR !

On sait que pour tout $\ell\in\mathbb{N}$ et pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$,

$$\deg\left(D^\ell(P)\right)=\begin{cases}-\infty \text{ si } \deg(P)<\ell\\ \deg(P)-\ell \text{ si } \deg(P)\geqslant\ell\end{cases}.$$

D'où, pour $\ell\in[\![0,n+1]\!]$,

$$\operatorname{Ker}(D_n^\ell)\overset{\text{def.}}{=}\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\mid P^{(\ell)}=0_{\mathbb{R}[X]}\right\}=\boxed{\begin{Bmatrix}\{0_{\mathbb{R}[X]}\} \text{ si } \ell=0\\ \mathbb{R}_{\ell-1}[X] \text{ si } \ell\geqslant 1\end{Bmatrix}=\mathbb{R}_{\ell-1}[X]}.$$

Par suite, $\operatorname{Ker}(D_n^{n+1})=E_n$; donc $D_n^{n+1}=0_{\mathscr{L}(E_n)}$; donc $\boxed{D_n \text{ est nilpotent}}$.

Remarque : $\mathbb{R}_{0-1}[X]\overset{\text{def.}}{=}\left\{P\in\mathbb{R}[X]\mid \deg(P)\leqslant -1\right\}=\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.

7. Soit P un polynôme de degré n. Démontrer que $(P,D(P),D^2(P),\dots,D^n(P))$ est une base de $E_n=\mathbb{R}_n[X]$.

On remarque que $\deg(P)=n$, $\deg(D(P))=n-1,\dots,\deg(D^n(P))=0$. Ainsi, il s'agit d'une famille de polynômes (non nuls) de degrés distincts décrivant $[\![0,n]\!]$, donc c'est une base de $E_n=\mathbb{R}_n[X]$.

Autre rédaction. La famille $(P_0,\dots,P_n)=(D^n(P),D^{n-1}(P),\dots,D(P),P)$ vérifie $\deg(P_k)=k$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$; donc ...

I-B Premiers résultats

Le but de cette partie est d'établir des propriétés des endomorphismes g recherchés et de donner un exemple. On note toujours $E=\mathbb{R}[X]$ et $E_n=\mathbb{R}_n[X]$.

I-B-1 Une caractérisation des sous-espaces vectoriels stables par g

Soit $p\in[\![0,n]\!]$.

8. Soit $g \in \mathscr{L}(E_n)$. On suppose que $g^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_n} + D_n$. Démontrer que g commute avec D_n.

On a $g, D_n \in \mathscr{L}(E_n)$ et $D_n g = g^3 - \lambda g^1 = g D_n$.

Plus généralement, $D_n = g^2 - \lambda \mathrm{id}_{E_n} = g^2 - \lambda g^0$ est l'évaluation en g d'un polynôme ; donc D_n commute avec g.

9. En déduire que E_p est **stable** par g, i.e. pour tout Q dans E_p, $g(Q) \in E_p$. *On pourra utiliser la question 6.*

$E_p = \operatorname{Ker}(D_n^{p+1})$ et g commute avec D_n donc avec D_n^{p+1}. Le résultat s'en suit.

On note $g_p : \left| \begin{array}{l} E_p \longrightarrow E_p \\ P \longmapsto g(P) \end{array} \right.$.

10. Démontrer la relation : $(g_p)^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_p} + D_p$.

Les deux applications partent de E_p et arrivent dans E_p car le sous-espace E_p est stable par g et D. De plus, pour tout P dans E_p,

$$g_p^2(P) = g^2(P) = \lambda P + P' = \lambda \mathrm{id}_{E_p}(P) + D_p(P),$$

d'où l'égalité désirée.

On considère g un endomorphisme de l'espace des polynômes réels $E = \mathbb{R}[X]$. On suppose que

$$g^2 = \lambda \mathrm{id}_E + D.$$

On admet : que g commute avec D ; que pour tout p dans $\mathbb{N}$, E_p est stable par g ; et qu'en notant $g_p : E_p \to E_p$, $P \mapsto g(P)$, on a encore $(g_p)^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_p} + D_p$.

11. Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension $n+1$, stable par D.

Démontrer qu'il existe au moins un polynôme P de F de degré maximal d ; puis que pour un tel polynôme P la famille $(P, D(P), D^2(P), \ldots, D^d(P))$ est une famille libre d'éléments de F ; puis que $d \leqslant n$.

En déduire que F est égal à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

En trois temps.

1° [**Voie 1**] Par l'absurde, supposons que les degrés des éléments de F ne sont pas majorés. Alors on peut trouver dans F une famille de $n+2$ polynômes non nuls de degrés distincts. Or une telle famille est libre et de cardinal $n+2 > \dim(F)$. Absurde ! Ainsi, comme $\dim(F) > 0$, F possède au moins un polynôme non nul ; puis le résultat suit.

[**Voie 2**] On note $(P_0, \ldots, P_n)$ une liste de $n+1$ polynômes non nuls de F qui en est une base, puis $d \overset{\text{def.}}{=} \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \deg(P_k) \in \mathbb{N}$. Quitte à permuter puis renommer, on peut supposer que $\deg(P_0) = d$. Ainsi, tout polynôme de F étant combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_n$, $F \subset \mathbb{R}_d[X]$. Donc $\boxed{P_0 \text{ est un polynôme de } F \text{ de degré } d\text{, maximal}}$.

2° [**Voie 1**] Soit $P \in F$ de degré maximal $d \in \mathbb{N}$. La famille $(P, D(P), D^2(P), \ldots, D^d(P))$ est une famille d'éléments de F car F est stable par D ; or elle est libre et de cardinal $d+1$ d'après la question 7. Donc $d+1 \leqslant \dim(F) = n+1$; donc $\boxed{d \leqslant n}$.

[**Voie 2**] Soit $P \in F$ de degré maximal $d \in \mathbb{N}$. D'après la question 7, $\mathbb{R}_d[X] = \mathrm{Vect}(P, D(P), D^2(P), \ldots, D^d(P))$; donc par stabilité de F par D, $\mathbb{R}_d[X] \subset F$. Or $F \subset \mathbb{R}_d[X]$; donc $\boxed{F = \mathbb{R}_d[X]}$. Donc, par égalité des dimensions, $d+1 = n+1$. D'où $d = n$. Par suite $d \leqslant n$.

3° [**Voie 1**] On a $d \leqslant n$; donc $F \subset \mathbb{R}_n[X]$. Or $\dim(F) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$; d'où $\boxed{F = \mathbb{R}_n[X]}$.

[**Voie 2**] On a $F = \mathbb{R}_d[X]$ et $d = n$. Donc $F = \mathbb{R}_n[X]$.

---

12. En déduire tous les sous-espaces vectoriels G de E (de dimension finie ou non) stables par D.

Soit G est un sous-espace vectoriel de E stable par D. Raisonnons par disjonction de cas.

1° Supposons que G est l'espace nul : $\boxed{G = \{0_E\}}$.

2° Supposons que G est non nul et de dimension finie.

On pose $p = \dim(G) - 1$. Alors $p \in \mathbb{N}$, puis d'après la question précédente, $\boxed{G = E_p}$.

3° Supposons que G n'est pas de dimension finie.

On va montrer que $G = \mathbb{R}[X] = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathbb{R}_p[X]$. Alors on fixe $p \in \mathbb{N}$ quelconque. On a $G \subsetneq \mathbb{R}_p[X]$ car G est de dimension infinie ; donc on choisit P un polynôme Fde G de degré $d > p$. Ainsi, comme plus haut, $(P, D(P), \ldots, D^d(P))$ est une famille d'éléments de G car G est stable par D et elle engendre $\mathbb{R}_d[X]$ d'après la question 7. Donc $\mathbb{R}_d[X] \subset G$. Or $p \leqslant d$; donc $\mathbb{R}_p[X] \subset G$.

Ainsi, G contient tous les sous-espaces $\mathbb{R}_p[X]$ pour $p \in \mathbb{N}$, donc $\boxed{G = E}$.

$\boxed{\text{Réponse :}}$ ce sont les sous-espaces $\underline{\{0_E\}, \text{ les } E_p \text{ pour } p \in \mathbb{N}, \text{ et } E}$; ils sont tous stables par D.

13. Démontrer que, pour qu'un sous-espace vectoriel G de E soit stable par g, il est nécessaire et suffisant qu'il soit stable par D.

Soit G un sous-espace vectoriel de E. Montrons une double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que G soit stable par g. Alors soit $P \in G$;

$$D(P) = (g^2 - \lambda \mathrm{id}_E)(P) = g(g(P)) - \lambda P.$$

Or, $g(G) \subset G$ et $P \in G$, donc, comme G est un sous-espace vectoriel, $g^2(P) - \lambda P \in G$. Ainsi, $D(P)$ est dans G. Donc G est stable par D.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que G soit stable par D. Alors, d'après la question 12, G est un des sous-espaces $\{0_E\}$, les E_p pour $p \in \mathbb{N}$, et E ; donc, d'après la question 9, G est stable par g.

D'où l'équivalence souhaitée.

I-B-2 Une application : le cas $\lambda < 0$

14. Démontrer que s'il existe au moins un élément $g \in \mathscr{L}(E_0)$ tel que $g^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_0} + D_0$, alors $\lambda \geqslant 0$.

On suppose qu'un tel endomorphisme existe. On choisit un d'eux, qu'on nomme g.

[Voie 1] Comme E_0 est une droite vectorielle et que $g \in \mathscr{L}(E_0)$, on choisit $a \in \mathbb{R}$ tel que $g = a\mathrm{id}_{E_0}$. Alors $g^2 = a^2\mathrm{id}_{E_0}$. Puis, comme $E_0 \subset \operatorname{Ker}(D)$, on a $D_0 = 0_{\mathscr{L}(E_0)}$; donc $g^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_0}$. Donc $\lambda = a^2$; d'où $\lambda \geqslant 0$.

[Voie 2] On remarque d'abord que $E_0 = \mathbb{R}X^0$.

D'une part, $g^2(X^0) = \lambda(X^0) + (X^0)' = \lambda X^0$.

D'autre part, $g(X^0) = aX^0$, où $c \in \mathbb{R}$; donc $g^2(X^0) = ag(X^0) = a^2X^0$.

Donc $\lambda = a^2$; d'où $\lambda \geqslant 0$.

---

15. On suppose que $\lambda < 0$. Déduire des résultats précédents les deux propriétés :

(a) Il n'existe pas d'endomorphisme g de E vérifiant $g^2 = \lambda \mathrm{id}_E + D$.

Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. Par l'absurde, supposons que $g^2 = \lambda \mathrm{id}_E + D$. Alors g stabilise tous les sous-espaces vectoriels stables par D, en particulier il stabilise E_0.

Mais alors $g_0^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_0} + D_0$. Par la question précédente, $\lambda \geqslant 0$, absurde !

Donc un tel g n'existe pas.

(b) Il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n vérifiant $g^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_n} + D_n$.

On adapte le raisonnement de la question précédente avec E_n et D_n aux lieux de E et D respectivement.

I-B-3 Un exemple pour $n = 2$

16. Soit $h \in \mathscr{L}(E_2)$. Démontrer que h commute avec D_2 si et seulement s'il existe au moins un élément $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $h = a\mathrm{id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$. *On pourra utiliser la question 7.*

Montrons une double implication.

$\boxed{\Leftarrow}$ Déjà, supposons que $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $h = a\mathrm{id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$, h est polynomial en D_2 ; donc h commute avec D_2.

$\boxed{\Rightarrow}$ Réciproquement (et c'est le sens qui demande du travail !) supposons que h commute avec D_2. Considérons P un polynôme de degré 2. Alors $\mathscr{B} = (P, D_2(P), D_2^2(P))$ est une base de E_2 d'après la question 7. Nommons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées de $h(P)$ sur cette base :

$$h(P) = aP + bD_2(P) + cD_2^2(P),$$

Posons alors $g = aD_2^0 + bD_2^1 + c\,(D_2)^2$; puis montrons que $h = g$. En effet, ces deux applications linéaires coïncident sur la base $\mathscr{B}$ au départ car ils coïncident en P et commutent avec D_2^0, D_2^1, D_2^2 :

$$h(D_2^k(P)) = D_2^k(h(P)) = D_2^k(g(P)) = g(D_2^k(P)),$$

quel que soit $k \in [\![0, 2]\!]$.

---

17. Démontrer que $(\mathrm{id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(E_2)$. En déduire que si $\lambda > 0$, alors il existe exactement deux endomorphismes $g \in \mathscr{L}(E_2)$ tels que $g^2 = \lambda\mathrm{id}_{E_2} + D_2$.

1° Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a\mathrm{id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2 = 0_{\mathscr{L}(E_2)}$. Alors en évaluant l'égalité en $D_2^2(P)$ (où $P = X^2$), on obtient $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, car la famille puis $(P, D(P), D^2(P))$ est libre (avec ou sans la question 7).

2° Supposons à présent $\lambda > 0$. D'abord, d'après la question 16 et ce qui précède, en posant $\mathscr{B} = (\mathrm{id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$, l'ensemble des endomorphismes de E_2 qui commutent à D_2 est un espace vectoriel dont $\mathscr{B}$ est une base.

Appelons g un élément de $\mathscr{L}(E_2)$; quel qu'il soit. Est-ce que

(Obj) $g^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_2} + D_2$?

Analyse. Supposons que (Obj). Alors g commute avec D_2. Nommons alors $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ses coordonnées sur la base $\mathscr{B}$: $g = a\mathrm{id}_{E_2} + bD_2 + c\,(D_2)^2$. Ainsi, en développant dans (Obj) et en utilisant ce que $D_2^3 = 0$, on trouve

$$a^2\mathrm{id}_{E_2} + 2abD_2 + (b^2 + 2ac)D_2^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_2} + 1D_2 + 0D_2^2\ .$$

Par liberté de la famille $\mathscr{B}$, on en déduit que

(CN) $a = \pm\sqrt{\lambda}, b = \dfrac{1}{2a}, c = \dfrac{-b^2}{2a}$.

car $\lambda > 0$.

Synthèse. En remontant les calculs, on vérifie que la condition (CN) est suffisante pour satisfaire (Obj). Ainsi, on trouve exactement deux endomorphismes g_0 et g_1 qui satisfont (Obj), lesquels sont définis par leurs coordonnées sur la base $\mathscr{B}$ comme suit : pour $j \in \{0; 1\}$,

$$g_j = a_j\mathrm{id}_{E_2} + b_jD_2 + c_j\,(D_2)^2\ .$$

où $a_j = (-1)^j\sqrt{\lambda}$, $b_j = \dfrac{1}{2a_j}$ et $c_j = \dfrac{-b_j^2}{2a_j}$. On a bien $a_1 \neq a_0$ car $\lambda > 0$; donc $g_1 \neq g_0$ par liberté de $(\mathrm{id}_{E_2}, D_2, (D_2)^2)$.

Remarque : on a aussi la formule $g_j = (-1)^j g$, où

(Rac2) $g = \sqrt{\lambda}\left(\mathrm{id}_{E_2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\lambda}D_2\right) - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{\lambda}D_2\right)^2\right)$.

I-C Cas $\lambda = 0$

L'objet de cette partie est d'étudier le cas où le réel λ est nul, et d'étendre le résultat à une situation plus générale. Dans cette partie l'entier n est supposé supérieur à 1 : $n \geqslant 1$.

I-C-1 Étude de l'existence d'un endomorphisme g tel que $g^2 = D_n$

18. Montrer que, s'il existe au moins un élément $g \in \mathscr{L}(E_n)$ tel que $g^2 = D_n$, alors g est nilpotent et $\dim\left(\operatorname{Ker}(g^2)\right) \geqslant 2$.

On a $g^{2n+2} = D_n^{n+1} = 0_{\mathscr{L}(E_n)}$ donc g est nilpotent.

Ensuite, $n \geqslant 1$; donc $D_n \neq 0_{\mathscr{L}(E_n)}$; donc $g^2 \neq 0_{\mathscr{L}(E_n)}$; donc $\operatorname{Ker}(g^2) \subsetneq E_n = \operatorname{Ker}(g^{2n+2})$. Ainsi, d'après les premières questions, $\operatorname{Ker}(g^0) \subsetneq \operatorname{Ker}(g^1) \subsetneq \operatorname{Ker}(g^2)$. D'où $\dim(\operatorname{Ker}(g^2)) \geqslant 2$. .

---

19. En déduire qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de E_n tel que $g^2 = D_n$, puis qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $E = \mathbb{R}[X]$ tel que $g^2 = D$.

S'il existait un tel endomorphisme, alors $\dim(\operatorname{Ker}(g^2)) \geqslant 2$, ce qui est absurde car $\dim(\operatorname{Ker}(D_n)) = 1$...

D'après la question 9, D et g stabilisent $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, avec $n \geqslant 1$. La question 10 et le point précédent mèneraient alors à une absurdité.

I-C-2 Étude de l'existence d'un endomorphisme g tel que $g^k = D^m$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $g^k = D^m$.

20. Démontrer que D et g sont surjectifs.

Déjà, D est surjectif. En effet, $(X^k\ :\ k \in \mathbb{N})$ est génératrice de E et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k = D\left(\dfrac{1}{k+1}X^{k+1}\right) \in \operatorname{Im}(D)$.

On en déduit que D^m est surjectif par composition car $m \geqslant 1$. Comme $g^k = D^m$, g^k est surjectif. Or $g^k(E) = g(g^{k-1}(E)) \subset g(E)$ car $k \geqslant 1$; donc g est surjectif.

---

21. Démontrer que pour tout $q \in [\![0, k]\!]$, $\operatorname{Ker}(g^q)$ est de dimension finie.

On sait que pour tout q dans $[\![0, k]\!]$, $\operatorname{Ker}(g^q) \subset \operatorname{Ker}(g^k) = \operatorname{Ker}(D^m) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$. Ainsi, $\operatorname{Ker}(g^q)$ est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, donc est de dimension finie.

Soit $p \in [\![1, k]\!]$.

22. Soit $\Phi : \text{Ker}(g^p) \to E$ l'application définie par : $\forall P \in \text{Ker}(g^p),\ \Phi(P) = g(P)$.

Démontrer que Φ est une application linéaire à valeurs dans $\text{Ker}(g^{p-1})$. Quel est son noyau ? Démontrer que $\text{Im}(\Phi) = \text{Ker}(g^{p-1})$.

1° Déjà, si $P \in \text{Ker}(g^p)$, alors $\Phi(P) = g(P)$, donc $g^{p-1}(\Phi(P)) = g^p(P) = 0$, donc $\Phi(P) \in \text{Ker}(g^{p-1})$. Donc Φ est bien à valeurs dans $\text{Ker}(g^{p-1})$. La linéarité de Φ vient de la linéarité de g.

2° On remarque alors que pour tout $P \in \text{Ker}(g^p)$

$$P \in \text{Ker}(\Phi) \Leftrightarrow g(P) = 0 \Leftrightarrow P \in \text{Ker}(g).$$

Ainsi, $\text{Ker}(\Phi) = \text{Ker}(g^p) \cap \text{Ker}(g)$. Or $p \geqslant 1$; donc $\text{Ker}(g^p) \supset \text{Ker}(g)$. D'où

$$\boxed{\text{Ker}(\Phi) = \text{Ker}(g)}.$$

3° Enfin, soit $P \in \text{Ker}(g^{p-1})$. Alors par surjectivité de $g : E \to E$, on choisit $Q \in E$ tel que $g(Q) = P$. Mais alors $g^p(Q) = g^{p-1}(P) = 0$, donc $Q \in \text{Ker}(g^p)$, donc $\Phi(Q) = P$. Ainsi, $\Phi(\text{Ker}(g^p)) = \text{Ker}(g^{p-1})$.

---

23. Déterminer une relation entre $\dim(\text{Ker}(g^p))$ et $\dim(\text{Ker}(g^{p-1}))$.

En déduire une expression de $\dim(\text{Ker}(g^p))$ en fonction de $\dim(\text{Ker}(g))$.

Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\text{Ker}(g^p)) - \text{rg}(\Phi) = \dim(\text{Ker}(\Phi))$. Donc

$$\dim(\text{Ker}(g^p)) - \dim(\text{Ker}(g^{p-1})) = \dim(\text{Ker}(g))$$

On peut substituer à p tout entier compris entre 1 et p. Donc, par somme téléscopique,

$$\dim(\text{Ker}(g^p)) = p\dim(\text{Ker}(g))$$

---

24. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers k et m pour qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel E tel que $g^k = D^m$. Retrouver le résultat de la question 19.

1° Pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$, si $g^k = D^m$, alors $k \dim(\operatorname{Ker}(g)) = \dim(\operatorname{Ker}(D^m)) = m$, donc k divise m. Réciproquement, si $m = qk$ où $q \in \mathbb{N}$, alors on trouve $g = D^q \in \mathscr{L}(E)$ tel que $g^k = D^m$.

D'où, une condition nécessaire et suffisante est que : $\boxed{k|m}$.

2° Ainsi, comme 2 ne divise pas 1, il n'existe pas de g tel que $g^2 = D$.

I-D Existence dans le cas $\lambda > 0$

On suppose que $\lambda > 0$.

25. Démontrer qu'il existe une unique suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o(x^m).$$

Préciser en particulier les valeurs de a_0, a_1, a_2, et démontrer que pour tout k dans $[\![1, \infty[\![$, $a_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}\dbinom{2k-1}{k}$.

1° On sait que la fonction infiniment continûment dérivable $]-1,1[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$ admet un développement limité à tout ordre en 0. Nommons alors $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ l'unique suite réelle telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_m x^m + o(x^m)$$

2° D'après la formule de Taylor-Young,

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{\frac{1}{2}-0}{1!}x + \frac{\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

Donc $\boxed{(a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2) = (1\ ,\ 1/2\ ,\ -1/8)}$.

3° [Voie 1] On démontre la formule par récurrence à l'aide de ce que :

$$n \geqslant 2 \implies a_n = a_{n-1} \times \left(\frac{1}{2} - (n-1)\right) \times \frac{1}{n}$$

[**Voie 2**] On suppose $n \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}-0\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)\\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{1-2\cdot 0}{2} \times \frac{1-2\cdot 1}{2} \times \cdots \times \frac{1-2\cdot(n-1)}{2}\\
&= \frac{1}{n!} \times \frac{1-2\cdot 1}{2} \times \cdots \times \frac{1-2\cdot(n-1)}{2}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!} \times (2\cdot 1-1)\times(2\cdot 2-1)\times\cdots\times(2(n-1)-1)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^n n!} \times (2\cdot 1-1)\times(2\cdot 2-1)\times\cdots\times(2n-1)\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^n n!} \times \frac{(2n)!}{(2\cdot 1)\times(2\cdot 2)\times\cdots\times(2n)}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^n n!} \times \frac{(2n)!}{2^n n!}\\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n-1}} \times \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}\\
&= \boxed{\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)2^{2n-1}}\binom{2n-1}{n}}\ ,
\end{aligned}$$

et la formule reste valable pour $n=1$. D'où le résultat désiré !

Remarque : on a aussi la formule $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)4^n}\dbinom{2n}{n}$.

---

25. Démontrer que pour tout m dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k a_{m-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } m \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$

On multiplie par elle-même l'expression du développement limité à l'ordre n, et l'on tronque à l'ordre n. On obtient

$$1+x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)\ ,$$

où la suite $(c_k)_k$ est le produit polynomial des deux polynômes $(a_i)_i$ et $(a_j)_j$: $(c_k)_k = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i}\right)_k$. Ainsi, par unicité du développement limité, $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} = 1$ si $k=0$ ou $k=1$ et 0 sinon !

On note $h_n = a_0 \mathrm{id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n$.

26. Démontrer que $h_n^2 = \mathrm{id}_{E_n} + D_n$.

Bis repetita placent...

On calcule

$$h_n^2 = (a_0 \mathrm{id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n) \circ (a_0 \mathrm{id}_{E_n} + a_1 D_n + a_2 D_n^2 + \cdots + a_n D_n^n)$$

Lorsqu'on développe ce produit, les termes D_n^k avec $k \geqslant n+1$ s'annulent. Il nous reste donc simplement

$$h_n^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k D_n^k,$$

avec $(c_k)_k$ est la suite de la question précédente ! Ainsi, on obtient $h_n^2 = \mathrm{id}_{E_n} + D_n$!

27. En déduire un élément g_n dans $\mathscr{L}(E_n)$ tel que $g_n^2 = \lambda \mathrm{id}_{E_n} + D_n$, puis un élément g de E tel que $g^2 = \lambda \mathrm{id}_E + D$.

1° On écrit que

$$\lambda \mathrm{id}_{E_n} + D_n = \lambda \left(\mathrm{id}_{E_n} + \frac{1}{\lambda} D_n \right).$$

En posant

$$g_n = \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{1}{\lambda} D_n \right)^k,$$

on a le résultat désiré !

Remarque : pour $n = 2$, on retrouve la formule (Rac2) page 16.

2° Enfin, en posant, pour tout P dans E,

$$\begin{aligned} g(P) &:= \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\max(\deg P, 0)} a_k \left(\frac{1}{\lambda} D \right)^k (P) \\ &= \sqrt{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{1}{\lambda} D \right)^k (P), \quad \text{car } \left(k > \deg(P) \Rightarrow D^k(P) = 0_{\mathbb{R}[X]} \right) \end{aligned}$$

on définit ainsi une application linéaire de E dans E telle que $g^2 = D$.

***

DEBUT ↖