21.1 MATRICE DE VECTEURS, DE FORMES LINÉAIRES

1. Définition de la matrice d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base.

2. Définition de la matrice d'une liste de p vecteurs dans une base.

3. Matrice dans une baseà l'arrivée de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

4. Définition (préparatoire) de la matrice d'une forme linéaire $\hat{\varphi}$ dans une base au départ et la base canonique de $\mathbb{K}$ à l'arrivée.

5. Définition (préparatoire) de la matrice d'une application linéaire définie par une liste de n formes linéaires $(\hat{\varphi}_1, \ldots, \hat{\varphi}_n)$ dans une base au départ et la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à l'arrivée.

21.2 MATRICE D'UNE APPL. LINÉAIRE DANS DES BASES

6. Définition de la matrice d'une application linéaire dans un couple de bases : une première base au départ et une dernière base à l'arrivée.

7. Remarque : tout endomorphisme est bien une application linéaire d'un premier espace dans un dernier.

8. Définition de la matrice d'un endomorphisme dans une seule et même base.

9. Exemple de la matrice dans la base $(1, i)$ de la similitude du plan vectoriel réel $\mathbb{C}$ de multiplicateur $a + ib$.

10. Rappel : isomorphisme d'espaces vectoriels de V sur $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.

11. Lien entre matrice d'un vecteur et matrice de son image par une application linéaire.

12. Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E, F)$ sur $\mathscr{M}_{\dim(F),\dim(E)}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.

13. (Exo) Base de $\mathscr{L}(E, F)$ induit par le choix d'un couple de bases.

14. Matrice d'une composée d'applications linéaires.

15. Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux (i.e. d'algèbres) de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_{\dim(E)}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.

16. Lien entre isomorphismes et matrices inversibles.

17. (Exo) Toute matrice « plus large que haute » représente une application linéaire dont le noyau contient une certaine droite.

18. (Exo) Toute matrice « plus haute que large » représente une application linéaire dont l'image est contenu dans un certain hyperplan.

21.3 MATRICE ET APPL. LINÉAIRE CANONIQUEMENT ASSOCIÉE

19. Rappel : application linéaire de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

20. Définition du noyau et de l'image d'une matrice.

21. Les lignes d'une matrice donnent un système d'équations de son noyau, les colonnes engendrent son image.

22. Caractérisation des matrices carrées inversibles en termes de noyaux et d'images.

23. Définition du rang d'une matrice.

24. Caractérisation des matrices carrées inversibles en termes de rangs.

25. Lien entre les diverses notion de rang : rang d'une liste de vecteurs, d'une application linéaire de rang fini, d'une matrice.

26. Retour sur la caractérisation des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) inversibles parmi les matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

27. Toute matrice carrée est inversible si, et seulement si, elle est inversible à gauche ou à droite.

21.4 MATRICES, SYSTÈMES ET APPL. LINÉAIRES

28. Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène comme noyau de la matrice.

29. Définition du rang d'un système linéaire.

30. Dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.

31. Interprétation de l'ensemble des seconds membres pour lesquels un système linéaire est compatible comme image de la matrice.

32. Rappel : structure affine de l'ensemble des solutions d'un système linéaire complet.

33. Définition d'un système de Cramer. Système carré ou non.

34. Rappel : Toute matrice carrée A est inversible si, et seulement si, le système $AX = Y$ admet exactement une solution, quel que soit le second membre Y.
C'est-à-dire si, et seulement si, l'application $X \mapsto AX$ est bijective.

35. (Exo) Soit $Y_0 \in \mathbb{K}^n$ fixé. Pour toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice A est inversible si, et seulement si, le système carré $AX = Y_0$ est de Cramer.

36. Toute matrice carrée A est inversible d'inverse B si, et seulement si, pour tout second membre Y, le système $AX = Y$ admet au plus pour solution BY, ou pour tout second membre Y, le système $AX = Y$ admet au moins pour solution BY.
C'est-à-dire si, et seulement si, l'application $X \mapsto AX$ est inversible à gauche d'inverse à gauche $Y \mapsto BY$ ou inversible à droite d'inverse à droite $Y \mapsto BY$.

37. Systèmes carrés de Cramer.

21.5 MATRICES ET CHANGEMENTS DE BASES

38. Définition de la matrice de passage d'une base initiale, première base, ancienne base $\mathscr{B}$, à une base finale, dernière base, nouvelle base $\mathscr{B}'$.

39. Formule de changement de base pour les vecteurs : effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.

40. Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.

41. Formule de changement de bases pour les applications linéaires : effet d'un changement du couple de bases sur la matrice représentant une application linéaire.

 walter.ngambou@ac-versailles.fr

42. Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme dans une seule et même base.

43. (*À venir*) Des exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.

21.6 MATRICES ÉQUIVALENTES ET RANG

44. Représentation d'une application linéaire de rang r par une matrice ayant un minimum de coefficients non nuls : $J_{n,p,r} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

45. Définition de l'équivalence d'une première matrice, carrée ou non, à une dernière de même taille.

46. Interprétation géométrique de l'équivalence entre deux matrices, carrées ou non.

47. Classification des matrices équivalentes par le rang et système de représentants des classes.

48. Invariance du rang par transposition. Conséquence sur les lignes.

49. Rang d'une matrice extraite. Le rang de A est supérieur au rang de toute sous-matrice de A. Je reviendrai rapidement en TD sur cette histoire de matrices extraites.

50. Caractérisation du rang par les matrices extraites. Le rang de A est égal à l'ordre maximal d'une sous-matrice carrée inversible.

51. Les opérations élémentaires sur les lignes préservent le noyau.

52. (Exo) Classification des matrices équivalentes en lignes par le noyau.

53. Les opérations élémentaires sur les colonnes préservent l'image.

54. (Exo) Classification des matrices équivalentes en colonnes par l'image.

55. Les opérations élémentaires préservent le rang.

56. Exemples de calculs de rang.

21.7 MATRICES SEMBLABLES, TRACE D'UN ENDOMORPHISME

57. Définition de la similitude d'une première matrice carrée à une dernière carrée de même ordre.

58. Interprétation géométrique interprétation géométrique de la similitude entre deux matrices carrées.

59. Des exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

60. Définition de la trace d'une matrice carrée.

61. Linéarité de la trace.

62. « Pseudo-commutativité » de la trace.

63. Invariance de la trace par similitude.

64. Définition de la trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

65. Linéarité et « pseudo-commutativité ».

66. Trace d'un projecteur en dimension finie.

***EXEMPLES* DE QUESTIONS DE COURS**

1. Forme géométrique du théorème du rang : pour tout sous espace S du départ, si S est un supplémentaire du noyau de f alors f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(f)$.

2. Réciproque de la forme géométrique du théorème du rang : pour tout sous espace S du départ, si f induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im}(f)$ alors S est un supplémentaire du noyau de f.

3. Lien entre matrice d'un vecteur et matrice de son image par une application linéaire.

4. Matrice d'une composée d'applications linéaires.

5. Lien entre isomorphismes et matrices inversibles.

6. Formule de changement de bases pour les applications linéaires.

7. Représentation d'une application linéaire de rang r par la matrice $J_{n,p,r} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

8. Interprétation géométrique de l'équivalence entre deux matrices, carrées ou non.

9. Classification des matrices équivalentes par le rang.

10. Invariance du rang par transposition.

11. Toute matrice de rang r admet une sous-matrice carrée inversible d'ordre r.

12. Trace d'un projecteur en dimension finie.