FIN ↘

CHAPITRE 23
DES DÉTERMINANTS

Table des matières

Partons de deux exemples : l'aire algébrique en dimension 2, et le produit vectoriel en dimension 3.

On en vient à naturellement vouloir définir quelque chose

1. qui s'apparente à un volume, donc n-linéaire, et qui vaut 0 si l'une des dimensions est « plate »
2. qui dépend d'une orientation, ou plutôt d'un choix d'ordre de vecteurs.

C'est le but de la notion de déterminant que l'on va définir dans la première partie.

Dans tout ce chapitre, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (pour le moment pas forcément de dimension finie), n et p désignent deux entiers naturels non nuls.

1 Définition

1.1 Construction du déterminant

Définition 1.

1. Une application $f : E^p \to F$ est dite p-linéaire si pour tout k de $[\![1, p]\!]$, pour tout $p-1$-uplet $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p)$ de E, l'application

$$y \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_p)$$

est linéaire.

2. Si $p = 2$, on dit que f est bilinéaire, si $p = 3$, on dit que f est trilinéaire.
3. Une forme p-linéaire est une application p-linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 1.1.

1. Dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, le produit scalaire est une forme bilinéaire.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le produit vectoriel est une application bilinéaire.

3. Si $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un epf, si E est l'ensemble des v.a.r. sur Ω, E est un $\mathbb{K}$-ev, et la covariance est une forme bilinéaire sur E.

Définition 2.

Soit $f : E \to F$ une application p-linéaire.

(i) f est dite symétrique si pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

(ii) f est dite antisymétrique si pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

(iii) f est dite alternée si pour tous $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$

$$(x_i = x_j) \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0.$$

Exemple 1.2.

1. Le produit scalaire et la covariance sont symétriques.

2. En revanche, le produit vectoriel est antisymétrique et alterné !

Propriété 1.

Soit $f : E^p \to F$ une application p-linéaire. Alors f est antisymétrique ssi f est alternée.

► ***Démonstration.***

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose f antisymétrique. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) &= -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) \text{ par antisymétrie.} \\ &= -f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) \text{ car } x_i = x_j \end{aligned}$$

Donc $f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)=0$, donc f est alternée.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que f est alternée. Soient $(x_1,\dots,x_p)$ dans E^p, $i\neq j$. Alors, comme f est alternée,

$$f(x_1,\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{i\text{-ème position}},\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{j\text{-ème position}},\dots,x_p)=0.$$

Mais

$$\begin{aligned}&f(x_1,\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{i\text{-ème position}},\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{j\text{-ème position}},\dots,x_p)\\&=f(x_1,\dots,\underbrace{x_i}_{i\text{-ème position}},\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{j\text{-ème position}},\dots,x_p)+f(x_1,\dots,\underbrace{x_j}_{i\text{-ème position}},\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{j\text{-ème position}},\dots,x_p),\end{aligned}$$

par linéarité par rapport à la i-ème variable. Puis, de même, par linéarité par rapport à la j-ième variable,

$$\begin{aligned}&f(x_1,\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{i\text{-ème position}},\dots,\underbrace{x_i+x_j}_{j\text{-ème position}},\dots,x_p)\\&=f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_i,\dots,x_p)+f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)\\&+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p)+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_j,\dots,x_p)\\&=f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p)\end{aligned}$$

par le caractère alterné de f (on a supprimé le premier et le quatrième terme). Donc

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)+f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p)=0,$$

i.e.

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p)=-f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p),$$

d'où le caractère antisymétrique !

QED◀

`Remarque 1.3.`

La symétrie ou l'antisymétrie exprime l'effet des transpositions sur une forme n-linéaire. Comme toute permutation est produit de transpositions, on en déduit la formule générale suivante :

Propriété 2.

Soit f une forme n-linéaire sur E.

1. Si f est symétrique alors pour tous $(x_1, \ldots, x_p) \in E^n$, pour toute permutation σ de S_n,

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_p).$$

2. Si f est antisymétrique alors pour tous $(x_1, \ldots, x_p) \in E^n$, pour toute permutation σ de S_n,

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p).$$

►***Démonstration.***

Rappel. $\mathcal{S}_p$ est l'ensemble des permutations (i.e. des bijections) de $[\![1, p]\!]$. Pour tout σ de $\mathcal{S}_p$, σ se décompose

- de manière unique en produit de cycles à supports disjoints,
- en produit de transpositions, pas de manière unique, mais avec une parité unique.

La signature ε :

- est l'unique application de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ telle que pour toute transposition τ, $\sigma(\tau) = -1$, et pour toutes σ et σ', $\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$
- vérifie : $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ où k est le nombre de transpositions entrant en jeu dans la décomposition de σ en produit de transpositions.
- vérifie : $\varepsilon(\rho) = (-1)^{r-1}$ si ρ est un r-cycle.

Ceci étant bien en tête, la preuve se fait simplement !

1. si f est symétrique, alors si $\sigma \in \mathcal{S}_p$, on écrit $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r$, où $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sont des transpositions Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

Par le caractère symétrique de f, pour toute τ transposition,

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}) = f(x_1, \ldots, x_p).$$

Ainsi,

$$f(x_{\tau_r(1)}, \ldots, x_{\tau_r(p)}) = f(x_1, \ldots, x_p),$$

puis

$$\begin{aligned} f(x_{\tau_{r-1}(\tau_r(1))}, \ldots, x_{\tau_{r-1}(\tau_r(p))}) &= f(x_{\tau_r(1)}, \ldots, x_{\tau_r(p)}) \\ &= f(x_1, \ldots, x_p), \end{aligned}$$

et, en poursuivant par récurrence,

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}) &= f(x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r(1)}, \ldots, x_{\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r(p)}) \\ &= f(x_1, \ldots, x_p), \end{aligned}$$

d'où le résultat !

2. si f est antisymétrique, alors si $\sigma \in \mathcal{S}_p$, on écrit $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_r$, où $\tau_1, \ldots, \tau_n$ sont des transpositions Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$.

Par le caractère symétrique de f, pour toute τ transposition,

$$f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, \ldots, x_p).$$

Ainsi,

$$f(x_{\tau_r(1)}, \ldots, x_{\tau_r(p)}) = -f(x_1, \ldots, x_p),$$

puis

$$\begin{aligned} f(x_{\tau_{r-1}(\tau_r(1))}, \dots, x_{\tau_{r-1}(\tau_r(p))}) &= -f(x_{\tau_r(1)}, \dots, x_{\tau_r(p)}) \\ &= (-1)^2 f(x_1, \dots, x_p), \end{aligned}$$

et, en poursuivant par récurrence,

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(p)}) &= f(x_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_r(1)}, \dots, x_{\tau_1\circ\dots\circ\tau_r(p)}) \\ &= (-1)^r f(x_1, \dots, x_p) \\ &= \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

d'où le résultat !

QED◀

Théroème 3.

Soit E un evdf n. L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

►***Démonstration.***

On admet la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel !

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit f une forme n-linéaire alternée. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-uplet de vecteurs de E. Écrivons, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, $X_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. ALors

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,1} e_i, \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} e_i, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} e_i\right) \\ &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2} e_{i_2}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n} e_{i_n}\right), \end{aligned}$$

la deuxième égalité étant utile car nous allons ensuite utiliser la multilinéarité, et allons avoir besoin d'un indice pour chaque variable. Par n-linéarité,

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} f\left(a_{i_1,1} e_{i_1}, a_{i_2,2} e_{i_2}, \dots, a_{i_n,n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} a_{i_j,j} f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\right) \end{aligned}$$

Maintenant, pour quels $(i_1, \dots, i_n)$ $f\left(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n}\right)$ est-elle non nulle ? Par son caractère alterné, il faut nécessairement que tous les (i_j) soient deux à deux distincts. Autrement dit on doit avoir $(i_1, \dots, i_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ où σ est une bijection de $[\![1, n]\!]$, i.e. une **permutation** de $[\![1, n]\!]$. D'où la réécriture

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} f(e_{\sigma(1), \dots, e_{\sigma(n)}}) \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \right) f(e_1, \dots, e_n) \text{ par caractère antisymétrique de } f \end{aligned}$$

DOnc, si l'on pose

$$\delta(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j},$$

alors δ est une forme n-linéaire alternée : vérifions-le !

- pour la n-linéarité, on ne montre que la linéarité par rapport à la première variable.

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \times \delta,$$

i.e. $f \in \mathrm{Vect}(\delta)$. ***QED◂***

On définit de cette manière le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base :

Définition 3.

Soit E un ev de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Le déterminant dans la base $\mathscr{B}$

est l'unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 en $e_1, \dots, e_n$ et est notée $\det_{\mathscr{B}}$. Autrement dit

$$\forall (X_1, \dots, X_n) \in E^n,\ \det_{\mathscr{B}}(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j},$$

si $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont les coordonnées de $(X_1, \dots, X_n)$ dans $(e_1, \dots, e_n)$.

Corollaire 4 (Corollaire important de la propriété fondamentale).

Soit E un ev de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, f une forme n-linéaire alternée.

Alors

$$\underbrace{f}_{\text{application}} = \underbrace{f(e_1, \dots, e_n)}_{\text{scalaire}} \times \underbrace{\det_{\mathscr{B}}}_{\text{application}} .$$

1.2 Déterminant et bases

Dans tout la suite, $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété 5.

Soit E un evdf n, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $\mathcal{E} = (X_1, \dots, X_n)$ une famille de n vecteurs de E.

(i) $\det_{\mathscr{B}}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}(X_1, \dots, X_n)$.

(ii) $\mathcal{E}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) \neq 0$. Dans ce cas, $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})}$.

►***Démonstration.***

(*)

1. Posons $f = \det_{\mathcal{B}'}$ (l'application « déterminant dans la base $\mathcal{B}'$) » . Alors f est une forme n-linéaire alternée sur E donc, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on sait, par le corollaire de la proposition fondamentale, que

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{B}},$$

ce qui signifie que

$$\underbrace{\det_{\mathcal{B}'}}_{\text{application}} = \underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})}_{\text{scalaire}} \times \underbrace{\det_{\mathcal{B}}}_{\text{application}},$$

soit, en évaluant en $(X_1, \dots, X_n)$,

$$\det_{\mathcal{B}'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n).$$

2.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathcal{E}$ est une base de E, par le premier point,

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1,$$

par définition du déterminant comme l'unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 en $\mathcal{B}$. Donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) \neq 0$ et $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par contraposée, on suppose que $\mathcal{E}$ n'est pas une base de E, donc E n'est pas libre (car $\mathrm{Card}(\mathcal{E}) = \dim(E)$), donc on dispose de $j \in [\![1, n]\!]$ tel que X_j est combinaison linéaire de $(X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_n)$. Sans perte de généralité, on suppose $j = 1$. Écrivons alors $X_1 = \displaystyle\sum_{i=2}^{n} \lambda_i X_i$. Alors

$$\begin{aligned}
\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) &= \det_{\mathcal{B}}(X_1, \dots, X_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i X_i, X_2, \dots, X_n) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \det_{\mathcal{B}}(X_i, X_2, \dots, X_n).
\end{aligned}$$

Mais, comme $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée, pour tout i dans $[\![2, n]\!]$, $\det_{\mathcal{B}}(X_i, X_2, \dots, X_n) = 0$, donc

$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = 0$, d'où la contraposée !

QED◀

Définition 4 : *et prop.*

Soit E un evdf. On définit sur les bases de E la relation suivante

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0.$$

Cette relation est une relation d'équivalence, et caractérise l'*orientation* des bases de E.

Une base de E étant fixée, on définit alors comme directe l'orientation de toute base $\mathscr{B}'$ telle que $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$, indirecte sinon.

Exo 1.1

Montrer que l'on définit bien une relation d'équivalence.

Remarque 1.4.

1. Nous n'utiliserons pas cette notion dans ce chapitre, mais dans celui des espaces euclidiens !
2. Géométriquement, le déterminant de n vecteurs correspond à un volume **orienté/algébrique** délimité par ces n vecteurs.
3. Dans $\mathbb{R}^2$, si $\mathcal{B}_0$ est la base canonique,

$$\det_{\mathcal{B}_0}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}),$$

ce qui correspond à l'aire du parallélogramme délimité par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1.3 Déterminant d'un endomorphisme

Le second déterminant relativement facile à établir est le déterminant d'un endomorphisme.

Propriété 6 (et def).

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

(i) $\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

(ii) La quantité $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.

Def : on appelle alors déterminant de u et on note $\det(u)$ la quantité $\det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

►***Démonstration.***

(i) Définissons

$$f : \left| \begin{array}{c} E^n \to \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{array} \right.$$

Alors f est n-linéaire alternée :

- n-linéarité : soit $i \in [\![1, n]\!]$, $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in E^{n-1}$, $(y, y') \in E^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned}
&f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda y + y', x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_{i-1}), u(\lambda y + y'), u(x_{i+1}), \dots, u(x_n)) \\
&= \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_{i-1}), \lambda u(y) + u(y'), u(x_{i+1}), \dots, u(x_n)) \text{ par linéarité de } u \\
&= \lambda \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_{i-1}), u(y), u(x_{i+1}), \dots, u(x_n)) \\
&+ \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_{i-1}), u(y'), u(x_{i+1}), \dots, u(x_n)) \text{ par } n\text{-linéarité de } \det \\
&= \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_{i-1}, y', x_{i+1}, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

d'où la n-linéarité.

- caractère alterné :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_i), \dots, u(x_i), \dots, u(x_n)) = 0,$$

par caractère alterné de $\det_{\mathcal{B}}$.

Donc f est une forme n-linéaire alternée, donc

$$f = f(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{B}}.$$

Donc pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n),$$

i.e.

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

(ii) Si $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une autre base de E,

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1, \dots, e'_n)) &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)) \text{ par la formule de changement de base.}\\ &= \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \text{ par la formule précédente}\\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n))\underbrace{\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}_{=1}\\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)),\end{aligned}$$

d'où l'indépendance en le choix de la base !

***QED*◂**

Propriété 7.

Soient u et v dans $\mathscr{L}(E)$, E evdf. Alors

(i) pour toute base $\mathcal{B}$ de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

(ii) $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.

(iii) si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.

(iv) $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.

(v) u est inversible ssi $\det(u) \neq 0$ et alors $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

►***Démonstration.***

1. c'est juste la définition du déterminant d'un endomorphisme (cf. propriété précédente !)

2. On remarque simplement que si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E,

$$\det(\mathrm{Id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E(e_1), \dots, \mathrm{Id}_E(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1.$$

3. si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E,

$$\begin{aligned}\det(\lambda u) &= \det_{\mathcal{B}}(\lambda u(e_1), \dots, \lambda u(e_n))\\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ par } n\text{-linéarité du déterminant !}\\ &= \lambda^n \det(u).\end{aligned}$$

4. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\begin{aligned}\det(u \circ v) &= \det_{\mathcal{B}}(u \circ v(e_1), \dots, u \circ v(e_n))\\ &= \det_{\mathcal{B}}(u(v(e_1)), \dots, u(v(e_n)))\\ &= \det(u) \times \det_{\mathcal{B}}(v(e_1), \dots, v(e_n))\\ &= \det(u)\det(v),\end{aligned}$$

d'où la formule désirée !

5. Déjà, si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on a les équivalences

$$\begin{aligned} u \in GL(E) &\Leftrightarrow (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est une base de } E \\ &\Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(u) \neq 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas,

$$\det(u)\det(u^{-1})) = \det(u \circ u^{-1}) = \det(\mathrm{Id}_E) = 1,$$

donc $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

***QED*◂**

Allez, un dernier effort théorique, pour donner la définition du déterminant d'une matrice !

1.4 Déterminant d'une matrice

Définition 5.

Le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la quantité définie par l'une de ces trois formules (équivalentes) suivantes :

(i) Si $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, si $(C_1, \dots, C_n)$ sont les colonnes de A, $\det(A) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

(ii) Il s'agit du déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(iii) (formule de Leibniz) Il s'agit de la quantité $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$.

On note cette quantité

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

►***Démonstration.***

- $\boxed{(1) \Leftrightarrow (2)}$ Si on note $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_n)$ où E_i est le vecteur-colonne avec des 0 partout et un 1 à la i-ème ligne. Alors si u est l'endomorphisme canoniquement associé à A, $u(E_i) = AE_i = C_i$, donc

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n).$$

- $\boxed{(1) \Leftrightarrow (3)}$ Cela se démontre simplement en remarquant que si $j \in [\![1, n]\!]$, $C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} E_j$.

QED◄

Remarque 1.5.

Il est important de garder en tête l'expression suivante

« le déterminant d'une matrice est une expression polynômiale en ses coefficients. »

1.4.1 Propriétés liées aux endomorphismes

Certaines propriétés sur les déterminants d'endomorphismes pour démontrer les propriétés sur les déterminants de matrices.

Propriété 8.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E. Alors

$$\det(u) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)).$$

►***Démonstration.***

Si on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors pour tout j dans $[\![1, n]\!]$,

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i,$$

donc

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)).$$

QED◄

Propriété 9.

Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. $\det(\mathrm{I}_n) = 1$.
3. si $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On a alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
5. si A et B sont semblables, $\det(A) = \det(B)$.

►***Démonstration.***

Soient u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

1. Alors AB est la matrice de $u \circ v$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et donc

$$\det(AB) = \det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = \det(A)\det(B)$$

2. $\det(\mathrm{I}_n) = \det(\mathrm{Id}) = 1$

3. $\det(\lambda A) = \det(\lambda u) = \lambda^n \det(u) = \lambda^n \det(A)$

4. On a les équivalences

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{K}) &\Leftrightarrow u \in GL(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})) \\ &\Leftrightarrow \det(u) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det(A) \neq 0, \end{aligned}$$

et alors $\det(A^{-1}) = \det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)} = \dfrac{1}{\det(A)}$.

5. Si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ est tel que $A = PBP^{-1}$, alors

$$\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1}) = \det(B).$$

***QED*◀**

`Remarque 1.6.`

Attention, la dernière proposition n'est pas une équivalence ! En effet, toutes les matrices inversibles sont de déterminant nul, mais elles ne sont pas toutes semblables !

1.4.2 Déterminant par blocs et déterminant de matrices triangulaires

On commence par avoir certains calculs concrets ! Tous les calculs de cette section seront basés sur la formule théorique $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$.

`Exemple 1.7.`

Calculons les déterminants théoriques 2×2 et 3×3.

1. Si $n = 2$, $\mathcal{S}_n = \{\mathrm{Id}, \tau\}$ où $\tau = (1\ 2)$.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_2} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{2} a_{\sigma(j),j}$$

$$= \varepsilon(\mathrm{Id}) a_{1,1} a_{1,2} + \varepsilon(\tau) a_{2,1} a_{1,2}$$

$$= a_{1,1} a_{2,2} - a_{2,1} a_{1,2}.$$

2. Si $n = 3$, alors

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{Id}, \rho, \rho^2, \tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}\},$$

où $\rho = (1\ 2\ 3)$, $\rho^2 = (1\ 3\ 2)$ et $\tau_{ij} = (i\ j)$. $(\mathrm{Id}, \rho, \rho^2)$ sont de signature 1 et les transpositions sont de signature -1. Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \underbrace{a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}}_{\mathrm{Id}} + \underbrace{a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}}_{\rho} + \underbrace{a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}}_{\rho^2}$$

$$- \underbrace{a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}}_{\tau_{12}} - \underbrace{a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}}_{\tau_{23}} - \underbrace{a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}}_{\tau_{13}}$$

Propriété 10.

Soient (a, b, c, d) quatre éléments de $\mathbb{K}$.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

`Remarque 1.8.`

Il existe une « règle » pour les déterminants 3×3, dite « règle de Sarrus » : elle n'est vraiment pas utile, car elle fait faire de nombreux calculs, et augmente les chances d'erreurs : il suffit d'écrire

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{array}$$

et de tracer les tois diagonales descendantes, de mettre un signe + devant chaque produit de trois termes, puis d'écrire les 3 diagonales montantes et de mettre un signe - devant chaque produit de trois termes.

Propriété 11.

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $A = \begin{pmatrix} B & M \\ 0_{n-r,r} & C \end{pmatrix}$, où $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$, $M \in \mathscr{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(B)\det(C)$.

►***Démonstration.***

La preuve est un peu technique mais intéressante. Posons $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, $B = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ et $C = (c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-r}$. Alors

- pour tous i et j dans $[\![1, r]\!]$, $b_{ij} = a_{ij}$.
- pour tous i et j dans $[\![1, n-r]\!]$, $c_{ij} = a_{r+i,r+j}$.

Par la formule de Leibniz pour le déterminant,

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}.$$

Maintenant, si $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} = 0$ dès lors que $j \in [\![1, r]\!]$ et $\sigma(j) \in [\![r+1, n]\!]$. Donc les seules permutations qui donnent un produit $\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j}$ éventuellement non nul sont les σ telles que $\sigma([\![1, r]\!]) \subset [\![1, r]\!]$, donc, comme σ est une bijection, les σ telles que $\sigma([\![1, r]\!]) = [\![1, r]\!]$, donc les σ

de la forme

$$\sigma = \rho \circ \omega,$$

où $\rho \in \mathscr{S}_r$ et ω est une permutation de $[\![r+1, n]\!]$. Donc

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\substack{\rho \in \mathscr{S}_r \\ \omega \in \mathscr{S}([\![r+1,n]\!])}} \varepsilon(\rho \circ \omega) \prod_{j=1}^{n} a_{\rho\circ\omega(j),j} \\
&= \sum_{\substack{\rho \in \mathscr{S}_r \\ \omega \in \mathscr{S}([\![r+1,n]\!])}} \varepsilon(\rho)\varepsilon(\omega) \prod_{j=1}^{r} a_{\rho\circ\omega(j),j} \prod_{j=r+1}^{n} a_{\rho\circ\omega(j),j}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\prod_{j=1}^{r} a_{\rho\circ\omega(j),j} = \prod_{j=1}^{r} a_{\rho(j),j} = \prod_{j=1}^{r} b_{\rho(j),j},$$

car j n'appartient pas au support de ω. De même,

$$\prod_{j=r+1}^{n} a_{\rho\circ\omega(j),j} = \prod_{j=r+1}^{n} a_{\omega(j),j} = \prod_{j=1}^{n-r} c_{\omega(j+r)-r,j}.$$

Or, si $\omega \in \mathscr{S}([\![r+1, n]\!])$, $j \mapsto \omega(j+r) - r$ est dans $\mathscr{S}_{n-r}$. DOnc

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\substack{\rho \in \mathscr{S}_r \\ \omega \in \mathscr{S}_{n-r}}} \left(\varepsilon(\rho) \prod_{j=1}^{r} b_{\rho(j),j}\right) \left(\varepsilon(\omega) \prod_{j=1}^{n-r} c_{\omega(j),j}\right) \\
&= \left(\sum_{\rho \in \mathscr{S}_r} \varepsilon(\rho) \prod_{j=1}^{r} b_{\rho(j),j}\right) \left(\sum_{\omega \in \mathscr{S}_{n-r}} \varepsilon(\omega) \prod_{j=1}^{n-r} c_{\omega(j),j}\right) \\
&= \det(B)\det(D)
\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré. ***QED***◀

On a deux corollaires immédiats :

Propriété 12.

1. Si $A = \begin{pmatrix} B_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_p \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{p} \det(B_i)$$

2. En particulier, si A est triangulaire, $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

`Remarque 1.9.`

1. On retrouve le résultat déjà vu précédemment : une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses diagonaux son tous non nuls.
   Ensuite, pour passer des matrices triangulaires supérieures aux matrices triangulaires inférieures, il nous faut la proposition suivante (intéressante).
2. **ATTENTION !** La formule du déterminant par blocs **n'est pas** généralisable à une décomposition sans matrice nulle :

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C).$$

Propriété 13.

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A^\top) = \det(A)$.

►***Démonstration.***

(*) Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $A^\top = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Alors

$$\begin{aligned}\det(A^\top) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}\alpha_{\sigma(j),j}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{j,\sigma(j)}.\end{aligned}$$

Mais si $\sigma\in\mathcal{S}_n$, σ est bijective de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$, donc

$$\prod_{j=1}^{n}a_{j,\sigma(j)} = \prod_{j=1}^{n}a_{\sigma^{-1}(j),j}.$$

Donc

$$\det(A^\top) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma^{-1}(j),j}.$$

Or, l'application d'inversion $\sigma\mapsto\sigma^{-1}$ est **une bijection de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{S}_n$.** Donc

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma^{-1}(j),j} = \sum_{\rho\in\mathcal{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n}a_{\sigma^{-1}rho(j),j} = \det(A).$$

Donc $\det(A^\top) = \det(A)$. ***QED***◀

Corollaire 14.

Le déterminant d'une matrice est linéaire par rapport à ses lignes ! (car $\det(A) = \det(A^\top)$, linéaire par rapport aux colonnes de $A^\top$ donc par rapport aux lignes de A).

`Remarque 1.10.`

On peut donc faire un déterminant par blocs pour une matrice du type $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D\end{pmatrix}$.

Exo 1.2

Soit $\varphi : \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]\\ \qquad P\mapsto((X+1)P)'\end{array}\right.$ Calculer $\det(\varphi)$.

Pour ce faire, on va déterminer la matrice de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\varphi(X^k) = ((X+1)X^k)' = (k+1)X^k + kX^{k-1},$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 2 & 2 & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & n-1 & n-1 \\ & & & & n \end{pmatrix}$$

de déterminant $\det(\varphi) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = (n+1)!$.

Nous allons maintenant voir comment, pratiquement, on calcule un déterminant.

2 Calculs pratiques de déterminants

Dans toute cette section, on ne considèrera que des déterminants de matrices.

2.1 Calcul direct

On a déjà vu des formules pour le calcul de déterminants :

- 2×2
- de matrices triangulaires (et donc diagonales aussi)

2.2 Opérations élémentaires

Et c'est le grand retour du pivot !

Propriété 15.

Soit A une matrices de colonnes $C_1, \dots, C_n$, λ un réel.

(i) (effet des permutations)

$$\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = -\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -\det(A).$$

(ii) (effet des transvections)

$$\begin{aligned}\det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j + \lambda C_i, \dots, C_n) &= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) + \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_i, \dots, C_n)\\ &= \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n)\\ &= \det(A)\end{aligned}$$

(iii) (effet des dilatations)

$$\det(C_1, \dots, \lambda C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = \lambda \det(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = \lambda \det(A).$$

Remarque 2.1.

Comme $\det(A) = \det(A^\top)$, les opérations sur les lignes ont le même effet sur le déterminant.

Méthode 1.

Une méthode pour calculer le déterminant d'une matrice est de d'abord l'échelonner, puis de faire le produit des coefficients diagonaux !

Précisément,

- si on fait $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$, on met un signe $-$ devant le déterminant,
- si on fait $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$, le déterminant est inchangé,

- si on fait $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$, on multiplie par $\boxed{\dfrac{1}{\lambda}}$.

Attention à cette dernière opération ! Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix} =_{L_1 \leftarrow 2L_1} \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple 2.2.

Quelques exemples de calcul :

1. Calculons $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 8 & 1 \end{vmatrix} &= 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} \text{ par linéarité du déterminant par rapport à la première colonne.*} \\
&= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \text{ par linéarité du déterminant par rapport à la deuxième colonne.} \\
&= 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\
&= -10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= -10
\end{aligned}$$

*Remarque : on n'a pas fait $C_1 \leftarrow \frac{1}{5} C_1$, c'est risqué, on utilise plutôt directement la linéarité.

2. Si a et b sont des réels, calculons $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$. On remarque que la somme de chaque coefficient de chaque ligne/colonne est égale à $a+2b$.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} &=_{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3} \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} \\
&= (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\
&= (a+2b)(a-b)^2.
\end{aligned}$$

3. on peut généraliser ! Calculons

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}_{[n]}$$

le $[n]$ signifie que le déterminant est de taille $n \times n$. On effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$, d'où

$$D_n = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a+(n-1)b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & \cdots & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a-b \end{vmatrix} \text{ en faisant pour tout } i \in [\![2, n]\!],\ C_i \leftarrow C_i - C_1$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

4. Calculer, pour tout n,

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 1 & 2 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & & n-1 & n \end{vmatrix}$$

On propose deux méthodes :

- On fait, dans l'ordre,

$$
\begin{aligned}
&L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}\\
&L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}\\
&\vdots\\
&L_2 \leftarrow L_2 - L_1
\end{aligned}
$$

  et on obtient donc le déterminant

$$
D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \ddots & & \ddots & 1 & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.
$$

- On fait, dans l'ordre (là l'ordre importe moins),

$$
\begin{aligned}
&L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&L_3 \leftarrow L_1\\
&\vdots\\
&L_n \leftarrow L_n - L_1
\end{aligned}
$$

Donc

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 1 & & n-2 & n-2 \\ 0 & 1 & & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \\ 1 & & n-2 & n-2 \\ 1 & & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \text{ par formule du déterminant par blocs.}$$

$$= D_{n-1}$$

$$= D_1 = 1 \text{ par récurrence immédiate.}$$

2.3 Développement selon une ligne/une colonne

C'est la méthode la plus standard, mais qui peut se révéler **très** lourde si elle n'est pas précédée d'un pivot.

Définition 6.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(i, j) \in [\![1, n]\!]$.

(i) Le mineur de position (i, j) dans A, noté $\Delta_{i,j}$ (si A est déjà fixée) est le scalaire défini comme le déterminant de la matrice $(a_{k,\ell})_{k\neq i,\ell\neq j}$. Précisément,

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

(ii) Le cofacteur de position (i,j) dans A est le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Exemple 2.3.

Si $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Propriété 16.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

(i) (développement selon une ligne) $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$.

(ii) (développement selon une colonne) $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$.

Remarque 2.4.

1. Par exemple, si $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, en développant selon la deuxième ligne,

$$\begin{aligned} D &= (-2) \times (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (3-5) + 2 \times (10-12) = 0. \end{aligned}$$

Remarque : on aurait pu se rendre compte que le déterminant était nul car $C_1 + C_3 = C_2$.

2. Penser qu fait que dans $(-1)^{i+j}$, le signe change dès qu'on incrémente i ou j. Ainsi, penser aux signes comme ceci :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

►***Démonstration.***

(*) On ne démontre que le développement selon une ligne Soit i dans $[\![1, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned} L_i &= \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{i,n} \end{pmatrix} \\ &= a_{i,1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + a_{i,2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{i,n} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Par linéarité par rapport à la ligne i,

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det(B_j),$$

$$B_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour calculer $\det(B_j)$, effectuons, dans l'ordre

$$\begin{aligned} L_{i-1} &\leftrightarrow L_i \\ L_{i-1} &\leftrightarrow L_{i-1} \\ &\vdots \\ L_1 &\leftrightarrow L_2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $i-1$ permutations. Donc

$$\det(B_j) = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Effectuons ensuite, dans l'ordre

$$\begin{aligned}
C_{j-1} &\leftrightarrow C_j \\
C_{j-1} &\leftrightarrow C_{j-1} \\
&\vdots \\
C_1 &\leftrightarrow C_2,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $j-1$ permutations. Donc

$$\det(B_j) = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1,j} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,j} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

D'où, par déterminant par blocs,

$$B_j = (-1)^{i+j-2}\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij},$$

donc

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

QED◂

Méthode 2.

Pour calculer un déterminant en développant selon une ligne/une colonne, on essaie de se ramener, à l'aide du pivot de Gauss, à une ligne ou une colonne avec 1 ou 2 coefficients par une méthode de pivot, puis on développe en faisant attention aux signes.

Ne pas se lancer dans un développement sans avoir préparé le terrain !

Par exemple, si on veut calculer

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

on peut ajouter d'abord C_4 à C_1, C_2 et C_3 :

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

puis développer selon la troisième ligne :

$$D = (-1) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

`Exemple 2.5.`

Un exemple **fondamental** : les déterminants tridiagonaux, i.e. de la forme

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n]},$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. L'idée est de faire un développement par rapport à la première ligne ou à la première colonne :

$$D_n = a \times \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n-1]} - b \begin{vmatrix} c & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n]},$$

puis on développe le second déterminant selon la première colonen :

$$D_n = a \times \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n-1]} - bc \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}_{[n-2]} = aD_{n-1} - bcD_{n-2},$$

donc (D_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 !

L'expression du terme général de (D_n) dépend notamment de la valeur du discriminant de l'équation caractéristique

(e) $\quad x^2 - ax + bc = 0,$

de discriminant $a^2 - 4bc$. (cf. votre cours sur les suites récurrentes !)

Traiter à titre d'exemple le cas $a = 1$, $b = 2$ et $c = -3$.

2.4 Déterminant de Vandermonde

Le déterminant de Vandermonde est un classique parmi les classiques.

Définition 7.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

On appelle matrice de Vandermonde associé aux réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de Vandermonde de $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est le déterminant de cette matrice.

Propriété 17.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

La matrice de Vandermonde associée à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est inversible si et seulement si les réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ sont deux à deux distincts.

►***Démonstration.***

(*) Notons A la matrice de Vandermonde associée à $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Déjà, s'il existe $i \neq j$ tels que $\alpha_i = \alpha_j$, alors la matrice A possède deux lignes identique, donc n'est pas inversible.

Ensuite, si les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont deux à deux distincts, on remarque que si

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{K}_{n-1}[X] \to \mathbb{K}^n \\ \qquad P \mapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{array} \right.$$

alors A est la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ au départ et la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à l'arrivée !

Mais φ est bijective car

- $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{K}^n$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension finie,

- φ est injective : si $P \in \ker(\varphi)$, $\deg(P) \leqslant n-1$ et $P(\alpha_1) = \cdots = P(\alpha_n) = 0$, donc P s'annule plus de fois que son degré, donc est nul.

Donc, comme φ est bijective, A est inversible ! ***QED◀***

Mais, en fait, nous avons mieux ! Nous savons (et devons savoir comment) calculer le déterminant de Vandermonde de n éléments de $\mathbb{K}$!

Propriété 18.

Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ leur déterminant de Vandermonde. Alors

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

En particulier, une matrice de Vandermonde est inversible si et seulement si tous les α_i sont distincts.

`Remarque 2.6.`

- N'oublions pas que (Chapitre 2)

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^{n} (\alpha_j - \alpha_i) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\alpha_j - \alpha_i).$$

- $V(a, b, c) = (b-a)(c-a)(c-b)$,
- $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_1) \times (\alpha_3 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_2) \times (\alpha_4 - \alpha_3)$.

►*Démonstration.*

On calcule ce déterminant en deux étapes. On suppose les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ deux à deux distincts, sinon le déterminant est clairement nul.

Étape 1. On exprime $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en fonction de $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

Pour ce, deux méthodes à connaître :

- **Méthode par opérations élémentaires.** On rappelle que

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

L'idée est de supprimer les coefficients de la dernière **ligne** via des opérations sur les **colonnes**.

On effectue **dans l'ordre**

$$\begin{aligned} C_n &\leftarrow C_n - \alpha_n C_{n-1} \\ C_{n-1} &\leftarrow C_{n-1} - \alpha_n \\ &\vdots \\ C_2 &\leftarrow C_2 - \alpha_n C_1 \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 - \alpha_n & \alpha_1^2 - \alpha_n\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} - \alpha_n\alpha_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} - \alpha_n & \alpha_{n-1}^2 - \alpha_{n-1}\alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} - \alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

En suite, on développe selon la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
V(\alpha_1,\dots,\alpha_n) &= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_n & \alpha_1^2-\alpha_n\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1}-\alpha_n\alpha_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_n & \alpha_{n-1}^2-\alpha_{n-1}\alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_n & \alpha_1(\alpha_1-\alpha_n) & \cdots & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1-\alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_n & \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1}(\alpha_1-\alpha_n)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n-1}-\alpha_n & \alpha_{n-1}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{vmatrix} \text{ par linéarité selon la pr} \\
&= (-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_n)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} \text{ par linéarité selon chaque ligne} \\
&= (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_i-\alpha_n)\times V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}) \text{ car } (-1)^{n+1}=(-1)^{n-1} \\
&= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n-\alpha_i)\times V(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1}).
\end{aligned}$$

- **Méthode utilisant un polynôme.** On considère

$$P : x \mapsto \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

En développant P selon la dernière ligne on remarque que

$$P(X) = (-1)^{n+1}\times D_0 + (-1)^{n+2}x\times D_2 + \cdots + (-1)^{2n}x^{n-1}\times D_{n-1},$$

où $D_0, \dots, D_{n-1}$ sont des déterminants **indépendants de** x. Donc $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$.

— le coefficient dominant de P est

$$(-1)^{n+n} D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdot s & \alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}).$$

— pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P(\alpha_i) = 0$ (car alors le déterminant $P(\alpha_i)$ possède deux lignes identiques), donc les $n-1$ racines de P (qui est de degré $\leqslant n-1$) sont $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

Donc

$$P(X) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (X - \alpha_i),$$

Donc

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= P(\alpha_n) \\ &= V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i) \end{aligned}$$

Étape 2. On conclut par récurrence : soit

$$(\mathscr{P}_n)\ \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n,\ V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{j=2}^{n} \prod_{i=1}^{j-1} (\alpha_j - \alpha_i).$$

L'**initialisation** est évidente car s'il n'y a qu'un réel, le déterminant est $\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 = \prod_{j=2}^{1} \prod_{i=1}^{j-1} (\alpha_j - \alpha_i)$ (produit vide).

Si on n'aime pas, on peut commencer à 2*.*

Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Alors si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n - \alpha_i)V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \text{ par l'étape 1.} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1}(\alpha_n - \alpha_i) \times \prod_{j=2}^{n-1}\prod_{i=1}^{j-1}(\alpha_j - \alpha_i) \text{ par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

Posons alors $\beta_j = \prod_{i=1}^{j-1}(\alpha_j - \alpha_i)$. Alors

$$\begin{aligned} V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \beta_n \times \prod_{j=2}^{n-1}\beta_j \\ &= \prod_{j=2}^{n}\beta_j \\ &= \prod_{j=2}^{n}\prod_{i=1}^{j-1}(\alpha_j - \alpha_i), \end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat ! ***QED***◀

3 Utilisation théorique du déterminant

On rappelle la proposition suivante

Propriété 19.

Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

On en déduit la proposition suivante :

Propriété 20.

Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(M)$ est la taille de la plus grande matrice carrée de déterminant non nul extraite de M.

►***Démonstration.***

Ceci vient simplement du fait que $\mathrm{rg}(M)$ est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de M. ***QED***◄

Définition 8.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la comatrice de A comme la matrice formée des cofacteurs de A. On la note $\mathrm{Com}(A)$.

Donc $\mathrm{Com}(A) = \left((-1)^{i+j}\Delta_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice A à laquelle on a retiré la ligne i et la colonne j.

`Exemple 3.1.`

1. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} m_{11} &= (-1)^{1+1}d \\ m_{12} &= (-1)^{1+2}c = -c \\ m_{21} &= (-1)^{2+1}b = -b \\ m_{22} &= (-1)^{2+2}a = a, \end{aligned}$$

i.e. $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

On remarque que $A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\mathrm{I}_2$.

2. Vérifier que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et que

$$A \times \mathrm{Com}(A)^{\top} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6\mathrm{I}_3 = \det(A)\mathrm{I}_3.$$

Propriété 21.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A \times \mathrm{Com}(A)^{\top} = \det(A)\mathrm{I}_n.$$

►***Démonstration.***

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $\mathrm{Com}(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $\mathrm{Com}(A)^{\top} = (\omega_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $A \times \mathrm{Com}(A)^{\top} = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Examinons les coefficients diagonaux de $A \times \mathrm{Com}(A)^{\top}$:

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\omega_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k}\Delta_{ik} = \det(A),$$

car il s'agit de la formule du développement selon la ligne i !

Examinons ensuite les coefficients non diagonaux : Soient $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$. Alors

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\omega_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{j+k}\Delta_{jk}.$$

Il s'agit d'un déterminant : celui de la matrice A, dans laquelle on a remplacé la ligne j par la ligne i ! Donc il s'agit d'un déterminant avec deux lignes égales, donc ce déterminant est nul.

Donc les termes diagonaux de $A \times \mathrm{Com}(A)^{\top}$ sont égaux à $\det(A)$, et les termes non diagonaux sont nuls.

D'où la formule ! ***QED***◀

Cette formule a seulement un intérêt théorique (sauf en dimension 2)

`Exemple 3.2.`

(i) Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(ii) (exo très classique). On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles, **d'inverse aussi dans** $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$**.** Ainsi $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas dans $GL_n(\mathbb{Z})$ car son inverse, $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas à coefficients entiers.
Montrer que si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$, $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(M) = \pm 1$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $M \in GL_n(\mathbb{Z})$. Alors M est inversible et $M^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Mais si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$,

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} m_{\sigma(j),j} \in \mathbb{Z},$$

et, de même, $\det(M^{-1}) \in \mathbb{Z}$. Mais $MM^{-1} = \mathrm{I}_n$, donc

$$\det(M)\det(M^{-1}) = 1,$$

donc, comme $\det(M)$ et $\det(M^{-1})$ sont entiers, $\det(M) = \pm 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que $\det(M) = \pm 1$. Or,

$$M \times \mathrm{Com}(M)^{\top} = \det(M)\mathrm{I}_n = \pm \mathrm{I}_n.$$

Donc M est inversible d'inverse

$$\frac{1}{\det(M)} \mathrm{Com}(M)^{\top} = \pm \mathrm{Com}(M)^{\top}.$$

Mais les coefficients de $\mathrm{Com}(M)$ sont des déterminants extraits de M, ils sont donc dans $\mathbb{Z}$.

Donc $\pm \mathrm{Com}(M)^\top \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ donc $M \in GL_n(\mathbb{Z})$.

(iii) Que vaut $\det(\mathrm{Com}(M))$? On sait que

$$\det(M)\det(\mathrm{Com}(M)^\top) = \det(\det(M)\mathrm{I}_n)) = \det(M)^n.$$

- si $\det(M) \neq 0$, alors

$$\det(\mathrm{Com}(M)) = \det(\mathrm{Com}(M)^\top) = \det(M)^{n-1}.$$

- si $\det(M) = 0$, alors $\mathrm{Com}(M)^\top$ n'est pas inversible (car $M\,\mathrm{Com}(M)^\top = 0$). Donc $\det(\mathrm{Com}(M)) = 0$.

DEBUT ↖