

FIN ↘

CHAPITRE 27

SOUS-ESPACES AFFINES

Table des matières

1	Notion de sous-espace affine	1
2	Hyperplans affines d'un espace vectoriel euclidien	6

1 Notion de sous-espace affine

Dans tout ce chapitre, E est un \mathbb{K} -ev.

- pour tous A et B dans E , on sait que $B - A$ est dans E . On note alors $\overrightarrow{AB} = B - A = -A + B$.
- dans ce chapitre on différenciera, arbitrairement, les points, éléments de E , et les vecteurs, différences de deux éléments de E , notés avec des flèches.

On peut trouver cela perturbant, mais ce ne sont que des **notations**, pour distinguer points et vecteurs (même si ce sont, en fait, les mêmes objets !)

Propriété 1 (Relation de Chasles).

Pour tous A, B, C dans E^3 ,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}$$

Propriété 2.

Soit $A \in E$, $\vec{u} \in E$.

$A + \vec{u}$ est l'unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

Définition 1.

Avec les notations précédentes, on dit que B est l'image de A par la translation de vecteur \vec{u} .

Définition 2.

Soit $\mathcal{F} \subset E$. On dit que \mathcal{F} est un sous-espace affine (s.e.a.) de E s'il existe A un point de E , F un sous-espace vectoriel de E , tels que

$$\mathcal{F} = A + F = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in F\}.$$

On dit alors que \mathcal{F} est le sous-espace affine **dirigé par** F (ou que F est une **direction** de E) et passant par A .

Propriété 3.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E .

1. Il y a unicité de la direction de \mathcal{F} . On la note parfois $\vec{\mathcal{F}}$.
2. Si A appartient à \mathcal{F} , alors pour tout B dans E , B appartient à \mathcal{F} ssi $\overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{F}}$.
3. Si A appartient à \mathcal{F} , alors $\mathcal{F} = A + \vec{\mathcal{F}}$.

► Démonstration.

1. Supposons que $\mathcal{F} = A + F = B + G$ avec $(A, B) \in \mathcal{F}^2$ et F, G deux sev de E .

Soit \vec{u} dans F . Alors $A + \vec{u} \in \mathcal{F} = B + G$, donc on dispose de \vec{v} dans G tel que $A + \vec{u} = B + \vec{v}$.

Alors $\vec{u} = B - A + \vec{v}$.

Or, $A \in \mathcal{F} = B + G$, donc $A - B \in G$, donc $B - A$ aussi!

Donc $\vec{u} = B - A + \vec{v} \in G$.

Donc $F \subset G$.

De même, on montrer que $G \subset F$, d'où le résultat!

2. Supposons que $\mathcal{F} = A_0 + F$ (avec A_0 un certain point et $F = \vec{\mathcal{F}}$). Alors pour tout B dans E ,

- si $B \in \mathcal{F}$, alors $B - A_0 \in F$, donc $\overrightarrow{A_0B} \in F$. Mais $A \in \mathcal{F}$ donc $\overrightarrow{AA_0} \in F$. Donc $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0B} \in F$, donc $\overrightarrow{AB} \in F$,

- réciproquement, si $\overrightarrow{AB} \in F$, alors $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0B} \in F$, donc, comme $\overrightarrow{AA_0} \in F$, $\overrightarrow{A_0B} \in F$, donc $B \in \mathcal{F}$.

3. Ainsi, par le point précédent,

$$\mathcal{F} = \{B \in E, \overrightarrow{AB} \in \vec{\mathcal{F}}\} = \{B \in E, B - A \in \vec{\mathcal{F}}\} = A + \{\vec{u}, \vec{u} \in F\} = A + \vec{\mathcal{F}}.$$

QED◀

Définition 3.

Soit E un \mathbb{K} -ev, \mathcal{F} un s.e.a. de E , F la direction de \mathcal{F} .

1. Si F est une droite/un plan/un hyperplan, on dit que \mathcal{F} est une droite affine/un plan affine/un hyperplan affine.
2. Si F est de dimension finie, on définit la **dimension** de \mathcal{F} comme étant la dimension de F .

Exemple 1.1.

C'est le plus important du chapitre ! Il faut se souvenir où nous avons vu des sous-espaces affines.

1. Déjà, tout s.e.v. est un s.e.a. passant par 0 (mais la réciproque n'est pas vraie !).
2. Une droite de \mathbb{R}^2 (quelconque) $ax + by = c$ est un sous-espace affine de \mathbb{R}^2 (de direction la droite vectorielle d'équation $ax + by = 0$).
3. Si (S) est le système linéaire non homogène $AX = b$, on sait que l'ensemble des solutions du système est

$$\{X_0 + X, X \in \mathcal{S}_h\},$$

où X_0 est une solution particulière du système, et \mathcal{S}_h l'ensemble des solutions du système homogène : \mathcal{S}_h est un sev (c'est $\ker(A)$), donc l'ensemble des solutions de (S) est un sea.

4. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle non homogène a une structure de sous-espace affine !
5. Soit

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f = 1 \right\}.$$

Alors \mathcal{G} est un s.e.a. de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$:

- $1 \in \mathcal{G}$,
- \mathcal{G} est dirigé par

$$\mathcal{G} = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

6. Soit (x_0, \dots, x_n) $n + 1$ réels deux à deux distincts, (y_0, \dots, y_n) dans \mathbb{R}^{n+1} . Montrons que

$$\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}[X], \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i\}$$

est un s.e.a. de $\mathbb{R}[X]$.

- Le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points (x_0, \dots, x_n) et aux valeurs (y_0, \dots, y_n) est dans \mathcal{L} .
- Soit ensuite $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors on a les équivalences :

$$\begin{aligned} P \in \mathcal{L} &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = y_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = P_0(x_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, (P - P_0)(x_i) = 0 \\ &\Leftrightarrow P - P_0 \in A \cdot \mathbb{R}[X] = \{AQ, Q \in \mathbb{R}[X]\}, \end{aligned}$$

où $A = \prod_{i=0}^n (X - x_i)$. $A \cdot \mathbb{R}[X]$ est clairement un sous-espace vectoriel et $\mathcal{L} = P_0 + A \cdot \mathbb{R}[X]$. D'où la structure de sous-espace affine !

En fait, beaucoup de ces exemples viennent de la propriété suivante, que l'on a déjà montrée et que l'on rappelle :

Propriété 4.

Soient E et F deux \mathbb{K} -ev, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $y \in F$. Soit

$$\mathcal{A} = \{x \in E, f(x) = y\}$$

- si $y \notin \text{Im}(f)$, $\mathcal{A} = \emptyset$,
- sinon, on dispose de $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = y$, et alors \mathcal{A} est le sous-espace affine de E passant par x_0 et dirigé par $\ker(f)$:

$$\mathcal{A} = x_0 + \ker(f).$$

Un cas particulier est intéressant en termes de vocabulaire est celui d'un hyperplan.

Définition 4.

Si φ est une forme linéaire non nulle sur E , alors pour tout λ dans \mathbb{K} , l'ensemble

$$S_\lambda = \{x \in E, \varphi(x) = \lambda\}$$

est un hyperplan affine dirigé par $\ker(\varphi)$, appelé surface de niveau de φ à la valeur λ .

Si E est de dimension 2, on parle parfois de ligne de niveau.

Remarque 1.2.

Comme une forme linéaire non nulle est surjective (dans \mathbb{K}),

$$E = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} S_\lambda.$$

L'espace est partitionné selon ses surfaces de niveau.

Définition 5.

Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de E , de dimension finie n , de direction F .

Un **repère affine** de \mathcal{F} est un $(n+1)$ -uplet (A_0, \dots, A_n) dans \mathcal{F}^{n+1} tel que $(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ soit une base de F . Ainsi,

$$\mathcal{F} = A_0 + \text{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}).$$

Tout élément de \mathcal{F} , x , possède donc des **coordonnées affines** $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, telles que

$$x = A_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}.$$

Exemple 1.3.

Ainsi, on sait depuis le lycée que, dans \mathbb{R}^3 , pour décrire un plan affine (s.e.a. de dimension 2), il faut 3 points.

Propriété 5 (Intersection de sous-espaces affines).

1. Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont deux sous-espaces affines de E , de directions respectives F et G .

- ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$,
- ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un s.e.a. dirigé par $F \cap G$.

2. Si $(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$ sont p s.e.a. de directions respectives (F_1, \dots, F_p) , alors

- ou bien $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{F}_i = \emptyset$,
- ou bien $\bigcap_{i=1}^p \mathcal{F}_i$ est un s.e.a. de direction $\bigcap_{i=1}^p F_i$.

► **Démonstration.**

1. si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$.

Soit $B \in E$. On a alors les équivalences suivantes :

$$B \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \Leftrightarrow B \in \mathcal{F} \text{ et } B \in \mathcal{G} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F \text{ et } \overrightarrow{AB} \in G \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \in F \cap G,$$

ce qui revient à dire que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sea de direction $F \cap G$.

QED ◀

2 Hyperplans affines d'un espace vectoriel euclidien

Dans cette section, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace vectoriel euclidien, $\|\cdot\|$ est la norme associée.

Définition 6.

Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E . Un **vecteur normal** à \mathcal{H} est un vecteur normal à $\vec{\mathcal{H}}$.

Propriété 6.

Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E , \vec{n} un vecteur normal à \mathcal{H} . Alors si $A \in \mathcal{H}$, \mathcal{H} est l'ensemble

$$\{M \in E, \langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle = 0.\}$$

► Démonstration.

C'est simplement dire que pour tout M dans E ,

$$M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \vec{AM} \in H \Leftrightarrow \langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle = 0.$$

QED◀

Exercice 1. Soit n un vecteur de E , $\lambda \in \mathbb{K}$. Déterminer $\{x \in E, \langle x, n \rangle = \lambda\}$.

Propriété 7.

Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E , de direction H , \vec{n} un vecteur normal à \mathcal{H} , $A \in \mathcal{H}$. Soit $M \in E$.

La quantité

$$d(M, \mathcal{H}) = \inf \left\{ \|\vec{MB}\|, B \in \mathcal{H} \right\}$$

est atteinte et vaut $|\langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle|$.

► Démonstration.

On écrit simplement que

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \|\vec{MB}\|, B \in \mathcal{H} \right\} &= \inf \{ \|M - B\|, B \in \mathcal{H} \} \\ &= \inf \{ \|M - A - h\|, h \in H \} = d(\vec{AM}, H). \end{aligned}$$

Or, cette distance est atteinte en le projeté orthogonal de \vec{AM} sur H , i.e. en $\vec{AM} - \langle \vec{AM}, \vec{n} \rangle \vec{n}$,

d'où la distance égale

$$\left\| \overrightarrow{AM} - \left(\overrightarrow{AM} - \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle \vec{n} \right) \right\| = \left\| \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle \vec{n} \right\| = |\langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle|.$$

QED ◀

Exo 2.1 _____

Soit $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$, et $M = (1, 1)$ dans \mathbb{R}^2 . Déterminer la distance de M à \mathcal{D} .

_____ ■

DEBUT ↘