# Notes de révision du cours de mathématiques

MSPI 1

Nicolas LAILLET - Walter NGAMBOU
walter.ngambou@ac-versailles.fr

Lycée Pasteur, 2024–2025
Version du 12 juin 2025

# Chapitre 26
# Dérivation d'une fonction réelle de deux variables réelles

## Table des matières

# Utiliser geogebra

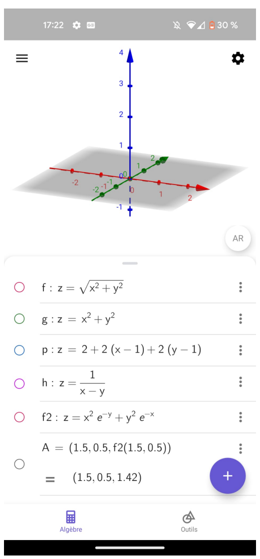
Pour ce cours, il est très utile de visualiser le graphe des fonctions de deux variables. les plans tangents, etc. Pour ce faire, je vous enjoins à installer GeoGebra : `https://www.geogebra.org/download`

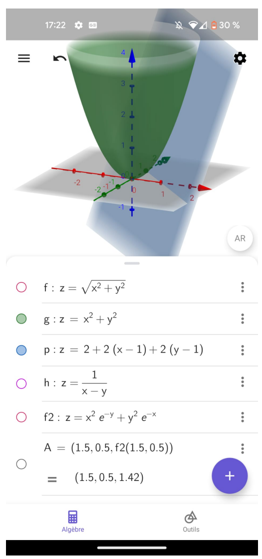
C'est un très bon logiciel de visualisation géométrique :

- sur téléphone ou tablette, téléchargez « Geogebra - Calculatrice 3D »
- sur ordinateur, téléchargez « Geogebra Classique 6 »

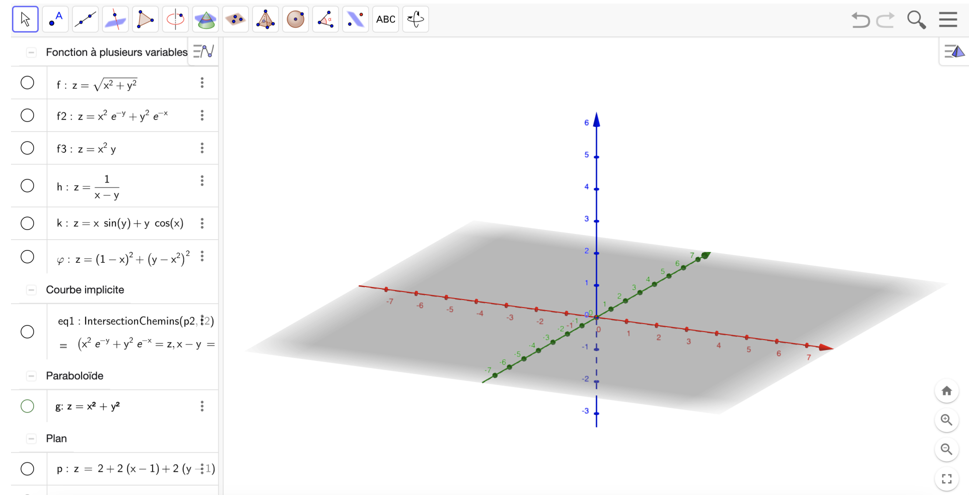
Téléchargez ensuite le fichier `ch26.ggb` sur cahier-de-prépa. Ouvrez-le fichier avec geogebra et essayez de le visualiser :

- sur téléphone cliquer sur les petits ronds à côté des expressions algébriques pour afficher les graphes. Ci-dessous, des captures d'écran :




- sur ordinateur, il y a le même système, les petits ronds sont à gauche de l'écran :




# 1 Position du problème

## 1.1 Fonction de deux variables

On cherche dans ce chapitre à étudier des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elles prennent comme arguments des **vecteurs** à **deux coordonnées** et renvoient un **réel**.

`Exemple 1.1.`**1.** La fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une fonction de deux variables.

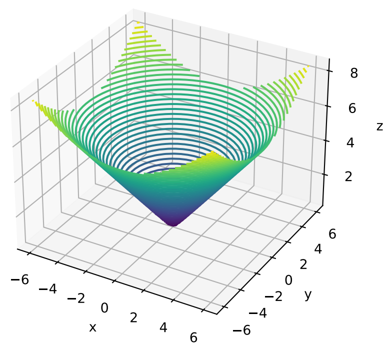
**2.** La fonction $(x, y) \mapsto \dfrac{1}{x - y}$ est une fonction de deux variables, définie sur $\mathbb{R}^2$ privé de la première bissectrice.

On peut chercher à **représenter** une fonction $f$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ : il suffit de placer en abscisses et en ordonnées les valeurs de $x$ et de $y$ et de placer sur l'axe $Oz$ la valeur $f(x, y)$.

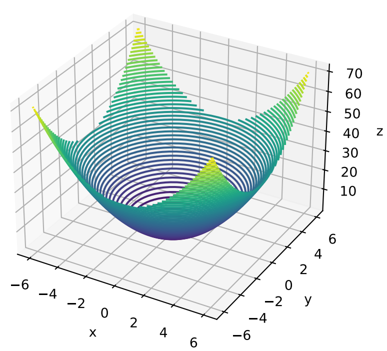
`Exemple 1.2.`

**Tous les graphes de ces fonctions sont visualisables sur le fichier geogebra !**

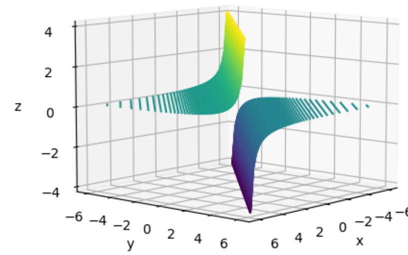
**1.** Si $f : (x, y)$



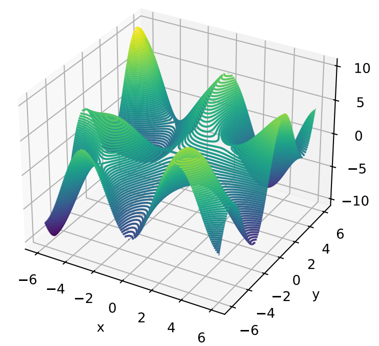

**2.** Si $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, alors on a le graphe :



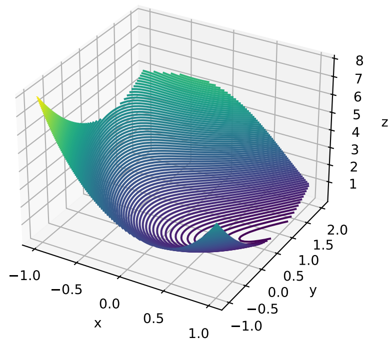

**3.** Si $h : (x, y)$ $1$ alors on a ces courbes ressemblant à des hyperboles :




**4.** Si $k : (x, y)$




**5.** Si $\varphi : (x, y) \mapsto (1 - x)^2 + (y - x^2)^2$, on a le graphe :



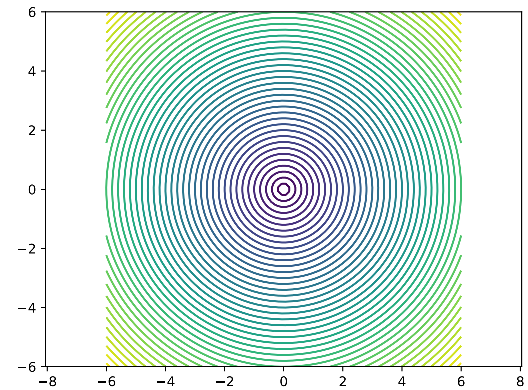

Que signifient les **lignes** constituant les surfaces ainsi dessinées ?

**Définition 1.**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application définie sur une partie $D$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La **ligne de niveau** associée à la valeur $\lambda$ est l'ensemble

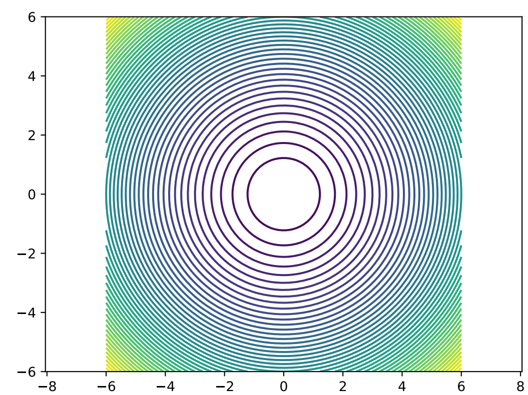
$$\{(x, y) \in D,\ f(x, y) = \lambda\}.$$

Remarque 1.3.
Attention, les lignes des graphes des fonctions précédentes ne sont pas des lignes de niveau : les lignes de niveau sont des parties de $\mathbb{R}^2$.

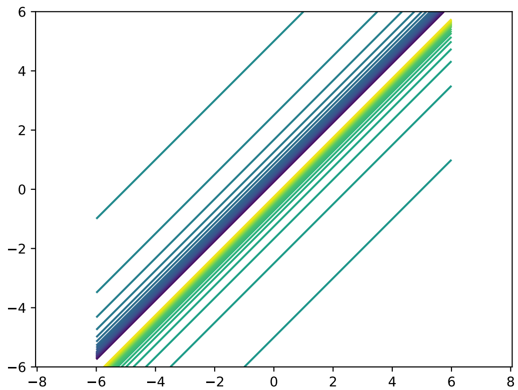
Exemple 1.4.**1.** Si $f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$, la ligne de niveau à la valeur $\lambda$ est le cercle de centre $(0, 0)$, de rayon $\lambda$.



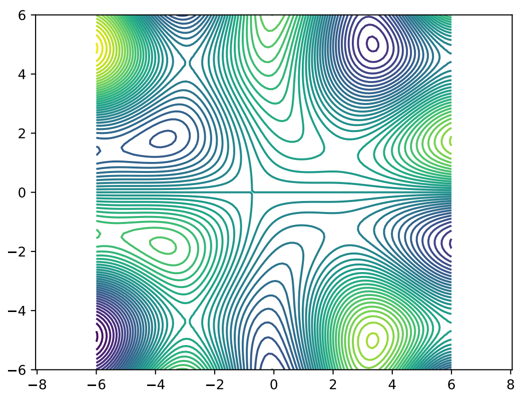

**2.** Si $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, la ligne de niveau à la valeur $\lambda$ est le cercle de centre $(0, 0)$, de rayon $\lambda^2$ (remarquez comme les lignes de niveau s'espacent).



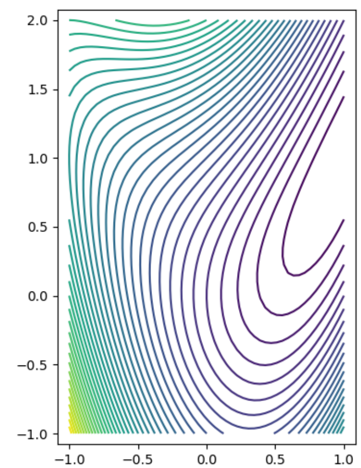

**3.** Si $h : (x, y) \mapsto \dfrac{1}{x - y}$, alors les lignes de niveau sont des droites : en effet, $\dfrac{1}{x - y} = \lambda \Leftrightarrow 1 = \lambda x - \lambda y \Leftrightarrow \dfrac{1}{\lambda} = x - y$, ce qui est une équation de droite (toutes sont parallèles).




**4.** Si $k : (x, y) \mapsto x\sin(y) + y\cos(x)$, les lignes de niveau sont les suivantes :




**5.** Si $\varphi : (x, y) \mapsto (1 - x)^2 + (y - x^2)^2$, les lignes de niveau sont les suivantes :




## 1.2 Boules ouvertes, ouverts

De même que la notion de dérivée de fonction ne s'étudie bien que sur des intervalles ouverts, la notion d'ouvert sera la notion importante.

**Définition 2.**
Soit $A = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$, $R > 0$. La boule ouverte de centre $A$ et de rayon $R$ est l'ensemble

$$B_o(A, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}.$$

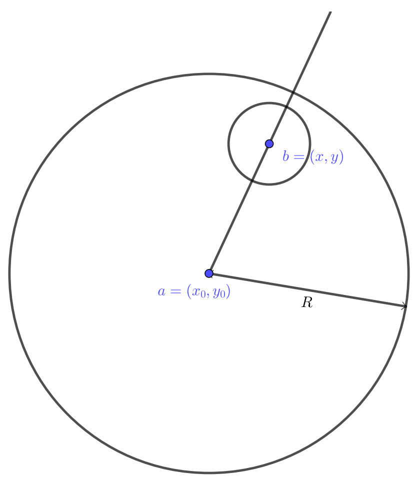
**Définition 3.**
Soit $U$ une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si

$$\forall A \in U,\ \exists \varepsilon > 0,\ B_o(A, \varepsilon) \subset U.$$

Remarque 1.5.
C'est la même idée que pour les intervalles ouverts : si I est un intervalle ouvert, pour tout $x_0$ dans I, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset$ I.

**Propriété 1.**
Une boule ouverte est ouverte...

▶***Démonstration.***
Soit $B$ une boule ouverte de centre $a = (x_0, y_0)$ et de rayon $R > 0$. Soit $b = (x, y) \in A$.
Il faut **FAIRE UN DESSIN** !




Soit $\ell$ la longueur $\|b - a\|$ et $\varepsilon = \dfrac{R - \ell}{2} > 0$. Soit $B'$ la boule ouverte de centre $b$ et de rayon $\varepsilon$. Soit $c \in B'$ Alors

$$\|c - a\| = \|c - b + b - a\| \leqslant \|c - b\| + \|b - a\| < \varepsilon + \ell = \frac{R + \ell}{2} < R,$$

donc $c \in B$. Donc $B$ est une boule ouverte. ***QED***◀

Remarque 1.6.
1. Il faut se rendre compte de ce qu'est un ensemble non ouvert. Par exemple, une boule **fermée** $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2\}$ n'est pas ouverte : les éléments du **cercle** sont des points $M$ tels que toute boule de centre $M$ part **à l'extérieur** de la boule.
2. (culturel) Un ensemble $F$ est dit fermé si $\mathbb{R}^2 \setminus F$ est ouvert. Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés, mais cela viendra l'an prochain.

## 1.3 Fonctions continues

Une fois que l'on a défini les bons ensembles de définition des fonctions, on parle rapidement de fonctions continues... La définition va vous paraître familière...

**Définition 4.**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a = (x, y) \in D$. On dit que $f$ est continue en $a$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall b \in D,\ \|b - a\| \leqslant \eta \Rightarrow |f(b) - f(a)| \leqslant \varepsilon.$$

**Propriété 2** (Théorèmes généraux).
Soient $f$, $g$ deux fonctions de $D$ dans $\mathbb{R}$, $a \in D$.

1. Si $f$ et $g$ sont continues en $a$, $f+g$ et $f \times g$ sont continues en $a$.
2. Si $f$ est continue en $a$ et ne s'annule pas sur une boule ouverte centrée en $a$, $\dfrac{1}{f}$ est continue en $a$.
3. Si $f$ est continue en $a$ et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en $f(a)$, alors $\varphi \circ f$ est continue en $a$.
4. Si $f$ est continue en $a = (x_a, y_a)$, alors pour toutes suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y_a$, $f(x_n, y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_a, y_a)$.

`Exemple 1.7.`**1.** Il s'agit de la même définition de la continuité que celle des fonctions réelles.

**2.** (si vous vous sentez plus en difficulté, passez cet exemple) La fonction

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, par les théorèmes généraux. Il est intéressant de se demander si elle est continue en $(0,0)$.

- point de vue « naïf » : on remarque que $\varphi : x \mapsto f(x,0)$ est continue car elle est constante nulle ! On remarque aussi que $\psi : y \mapsto f(0,y)$ est continue car constante nulle ! Donc la fonction est continue par rapport à chacune des variables.
- mais, en fait, la fonction **n'est pas** continue en $0$ :

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

qui ne tend pas vers $0$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

Nous ne nous focaliserons pas sur la continuité : ce n'est pas du tout le but de ce chapitre !

# 2 Dérivées partielles

## 2.1 Définitions

C'est **LA** notion fondamentale de ce chapitre !

**Définition 5.**
Soit $f$ une fonction définie sur un ouvert $D$ de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

- On dit que $f$ admet une dérivée partielle selon la première variable en $(x_0, y_0)$ si l'application $\varphi : x \mapsto f(x, y_0)$ est dérivable en $x_0$. On note alors cette dérivée partielle

$$\partial_1 f(x_0, y_0) \text{ ou bien } \frac{\partial f}{\partial x} f(x_0, y_0).$$

- On dit que $f$ admet une dérivée partielle selon la seconde variable en $(x_0, y_0)$ si l'application $\varphi : y \mapsto f(x_0, y)$ est dérivable en $y_0$. On note alors cette dérivée partielle

$$\partial_2 f(x_0, y_0) \text{ ou bien } \frac{\partial f}{\partial y} f(x_0, y_0).$$

`Remarque 2.1.`**1.** **ATTENTION** ! C'est une notation **dangereuse** que la notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ : $x$ n'a pas vraiment de statut particulier, il n'y a pas de raison que $x$ soit la première variable et $y$ la seconde. Je préfère les notations $\partial_1$ et $\partial_2$, mais le programme (et la physique !) insistent sur les notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

**2.** Il faut revenir à l'idée que vous aviez en physique : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée de l'expression de $f(x,y)$ « à $y$ fixé » .

`Exemple 2.2.`**1.** Si $g : (x,y) \mapsto 2x^2y + \sin(x)\sin(y)e^y$, alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 4x_0y_0 + \cos(x_0)\sin(y_0)e^{y_0}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0) = 2x_0^2 + \sin(x_0)\cos(y_0)e^{y_0} + \sin(x_0)\sin(y_0)e^{y_0}.$$

**2.** Si

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$$

alors, si $x_0$ et $y_0$ sont non nuls,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{y_0(x_0^2+y_0^2) - x_0y_0 \times 2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} = \frac{y_0(y_0^2-x_0^2)}{(x_0^2+y_0^2)^2},$$

et, si $x_0 = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$. On fait de même pour la dérivée partielle par rapport à la seconde variable.
Donc $f$ admet des dérivées partielles dans les directions $x_0$ et $y_0$...
**Mais alors, c'est terrible : $f$ n'est même pas continue en $(0,0)$ !**

L'existence des dérivées partielles n'est donc pas la bonne définition. Ce qui nous importe, c'est la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ !

**Définition 6.**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$, où $D$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On dit que $f$ est $\mathscr{C}^1$ sur $D$ si $f$ admet des dérivées partielles selon les deux directions, et si

$$(x,y) \mapsto \partial_1 f(x,y) \text{ et } (x,y) \mapsto \partial_2 f(x,y) \text{ sont continues.}$$

Il faut réussir à faire un parallèle avec la dérivabilité des fonctions réelles. Pour une fonction dérivable en $a$, on a $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$, et on sait alors que $y = f(a) + (x-a)f'(a)$ est **l'équation de la tangente** à la courbe de $f$ en $a$.

**Propriété 3.**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $(x_0,y_0) \in D$.

- Alors

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + o(\|(h,k)\|),$$

  c'est-à-dire qu'il existe $\varphi$ une fonction définie sur une boule ouverte centrée en $(0,0)$ telle que, pour tout $(h,k)$ dans cette boule ouverte,

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + \varphi(h,k),$$

  et $\dfrac{\varphi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \underset{(h,k)\to(0,0)}{\longrightarrow} (0,0)$.
- En d'autres termes, on a

$$f(x,y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{=} f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) + o(\|(x-x_0, y-y_0$$

- L'équation du **plan tangent** à la courbe de $f$ en $(x_0,y_0)$ est

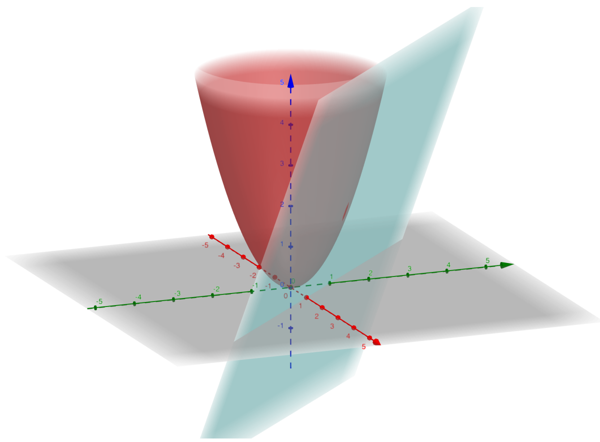
$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)$$

`Exemple 2.3.`
Il faut se représenter les plans tangents à certaines courbes. Regardons certains exemples, visualisables sur le fichier geogebra.
**1.** Prenons $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$, $(x_0,y_0) = (1,1)$.
Comme $\partial_1 f(x_0,y_0) = 2x_0$ et $\partial_2 f(x_0,y_0) = 2y_0$, l'équation du plan tangent en $(1,1)$

est

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

On a donc le graphe suivant (sur geogebra, fonction g, point A et plan p)



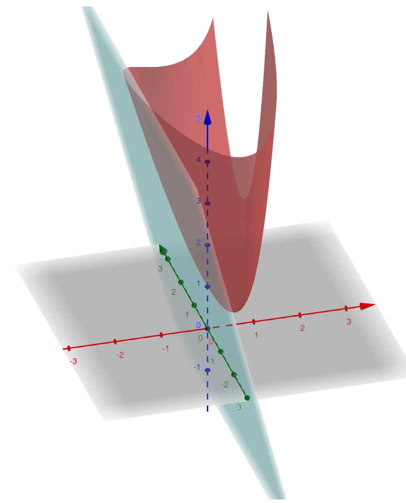
**2.** Si $\varphi : (x,y) \mapsto (1-x)^2 + (y-x^2)^2$, alors

$$\partial_1\varphi(x_0,y_0) = -2(1-x_0) - 4x(y_0 - x_0^2) \text{ et } \partial_2\varphi(x,y) = 2(y-x^2),$$

donc, si $(x_0,y_0) = (-1,1)$, l'équation du plan tangent en $(x_0,y_0)$ est

$$z = 4 - 4(x+1)$$

On obtient donc le graphe suivant (sur geogebra, fonction $\varphi$, point B et plan q)



## 2.2 Exercices de vérification

1. Soit $f : (x,y) \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$. Vérifier qu'en tout point de leur ensemble de définition, les dérivées partielles de $f$ sont nulles.
   En calculant $f(0,0)$, $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}, \dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$ et $f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{2}}, -\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)$, faire une remarque intelligente.
2. Faire les exercices 33.1, 33.2, 33.3 du cahier de calculs !

# 3 Dérivée selon une direction – gradient

Nous allons élargir le point de vue des dérivées partielles. En fait, $\partial_1$ et $\partial_2$ sont des cas particuliers d'un opérateur plus général, celui de la dérivée selon un vecteur.

## 3.1 Dérivée selon une direction

**Définition 7.**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $u_0 = (x_0, y_0) \in U$, $\vec{v}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $f$ est dérivable en $u_0$, selon la direction $\vec{v}$ si la quantité

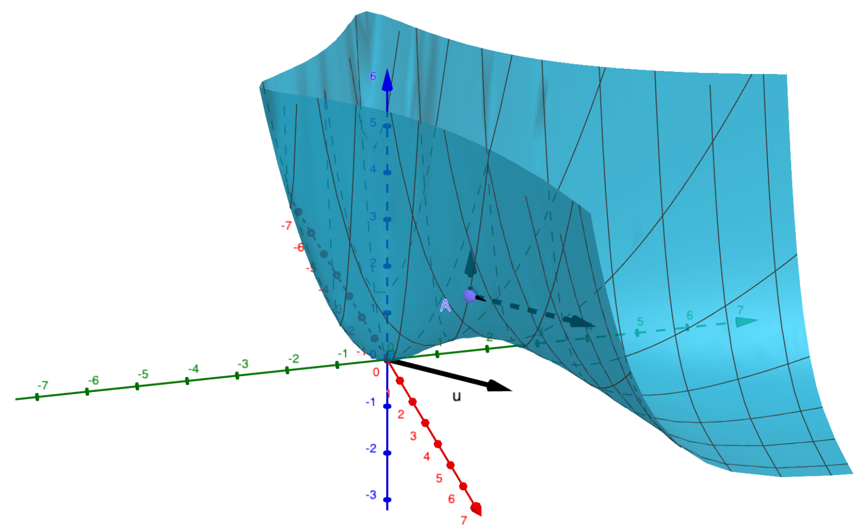
$$\frac{f(x_0 + t\vec{v}) - f(u_0)}{t}$$

admet une limite lorsque $t$ tend vers $0$. On appelle cette limite dérivée directionnelle en $u_0$ de direction $\vec{v}$, et on la note $D_{\vec{v}}(f)(u_0)$.
Les dérivées partielles par rapport à la première et à la seconde variable sont donc les dérivées selon les directions $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

`Remarque 3.1.`

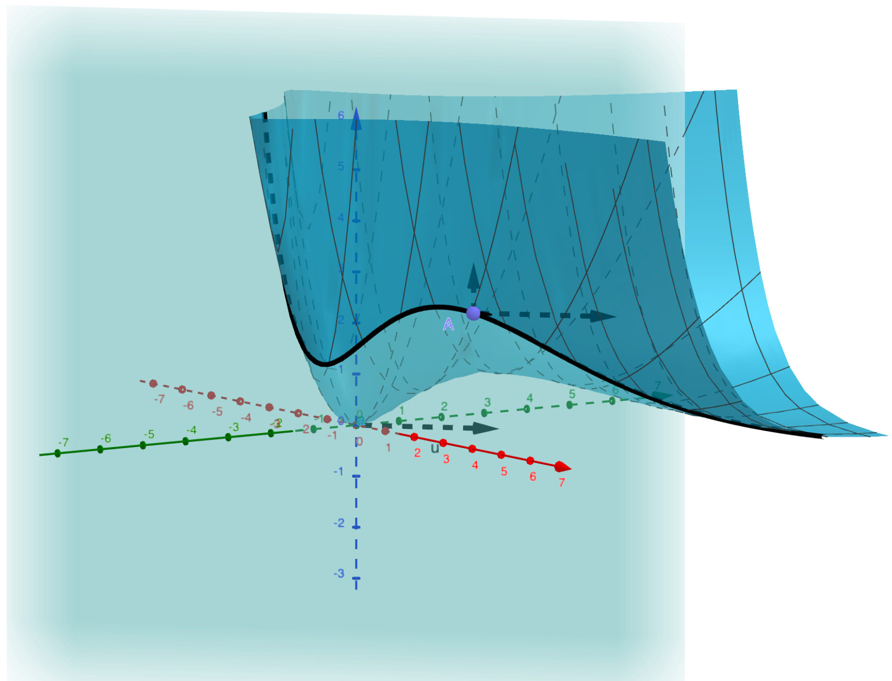
**1.** Il faut pouvoir interpréter géométriquement les dérivées directionnelles, à l'aide du graphe de la fonction. Dériver en $u_0$ selon la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ c'est en fait considérer la courbe obtenue en intersectant le graphe de la fonction avec le plan de vecteurs directeurs $\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, puis considérer la dérivée de la fonction ainsi obtenue.

Exemple : soit $f(x, y) = x^2 e^{-y} + y^2 e^{-x}$, et $u$ le vecteur $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$. On veut déterminer la dérivée en un point $A$ selon la direction $u$. Pour ce faire, on considère les 2 vecteurs $\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$




Puis on intersecte avec le plan passant par $A$ et dirigé par ces deux vecteurs. On obtient alors la courbe d'une fonction réelle. La dérivée de cette fonction en $A$ correspond à la dérivée directionnelle ! (sur geogebra, fonction $f_2$, point C, plan r et courbe eq1)


walter.ngambou@ac-versailles.fr



2. En pratique, on ne calculera pas de dérivées directionnelles « pour le plaisir » : c'est plutôt une notion qui reviendra régulièrement (par exemple, lorsque l'on dérivera selon un arc dans la suite).
3. On peut très bien admettre des dérivées selon toutes les directions, mais ne pas être continue !

**Exo 3.1**

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$ Démontrer que $f$ admet des dérivées en $0$ dans toutes les directions mais n'est pas continue en $0$.

### 3.2 Gradient

**Définition 8.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$, $u_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $f$ admet des dérivées partielles en $u_0$, on définit le gradient de $f$, noté $\nabla f$ ou $\vec{\nabla}(f)(u_0)$ le vecteur

$$\nabla f(u_0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(u_0) \\ \partial_2 f(u_0) \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, le symbole « $\nabla$ » se prononce « nabla » .

`Exemple 3.2.`
Trouver des formules pour $\nabla(\lambda f + \mu g)$, $\nabla(fg)$, $\nabla\left(\dfrac{1}{f}\right)$, et $\nabla(\varphi \circ f)$ où $\varphi$ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

### 3.3 Classe $\mathscr{C}^1$, dl et recherche d'extremums

On rappelle qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont continues. On a alors la

**Propriété 4.**
Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $u_0 = (x_0, y_0) \in U$. Alors $f$ possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $u_0$ :

$$f(u_0 + \vec{v}) \underset{\vec{v} \to \vec{0}}{=} f(u_0) + \langle \nabla f(u_0), \vec{v} \rangle + o(\|\vec{v}\|).$$

Si $u_0 = (x_0, y_0)$, cela revient à dire que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(u_0) + \partial_1 f(x_0, y_0)h + \partial_2 f(x_0, y_0)k + o(\|(h, k)\|).$$

Cette proposition nous a déjà permis de déterminer le **plan tangent** à une surface. Elle permet aussi de démontrer qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est continue !

Un des buts de ce chapitre est de comprendre comment l'étude des dérivées permet de rechercher d'éventuels extremums de fonctions de deux variables. Si vous vous souvenez de ce que l'on a fait dans le chapitre de dérivabilité, vous comprendrez d'où vient les définitions et propositions suivantes.

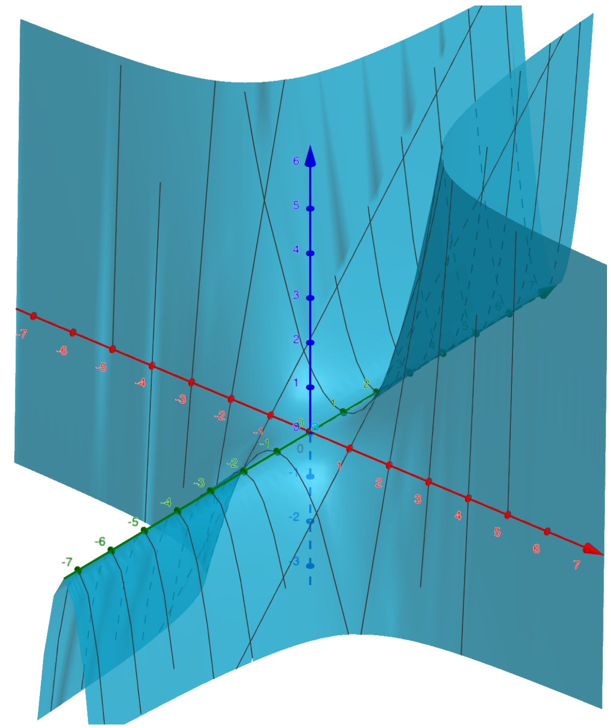
**Définition 9.**
Soit $U$ un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, $u_0 \in U$.

1. on dit que $u_0$ est un point critique de $f$ si $\partial_1 f(u_0) = \partial_2 f(u_0) = 0$.
2. on dit que $f$ admet un maximum (resp. minimum) local en $u_0$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u \in B(u_0, \varepsilon) \cap U,\ f(u) \leqslant f(u_0) \text{ (resp. } f(u) \geqslant f(u_0)).$$

**Propriété 5.**
Soit $U$ un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Si $f$ admet un extremum local en $x_0$, alors $x_0$ est un point critique de $f$.

Remarque 3.3.
**ATTENTION !!!!!!!!**
Ce n'est qu'une condition **nécessaire**. De même que la fonction $x \mapsto x^3$ possède un point critique. Par exemple, la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 y$ possède un point critique en $(0, 0)$, qui n'est pas un extremum local. (sur geogebra, fonction $f_3$)



**Méthode 1.**
Comment déterminer les extremums locaux d'une fonction ?
C'est une question délicate, pour laquelle on donnera deux réponses :

- si l'on a un polynôme du second degré, on a :

$$f(x_0 + h, y_0 + h) = f(x_0, y_0) + ah^2 + bhk + ck^2.$$

Mais comment étudier le polynôme ? En utilisant une forme canonique (souvent utile) ou en remarquant que, en factorisant par $k^2$, on a à étudier $k^2 P(h/k)$ où $P(X) = aX^2 + bX + c$. Si ce polynôme change de signe, on n'a pas d'extremum local. Sinon, on en a un !

- sinon, des inégalités peuvent fonctionner (mais cela dépend vraiment des situations)
- enfin, regarder dans différentes questions peut s'avérer utile.
- une réponse qui marchera très bien en deuxième année : sur certaines parties du plan, on aura un théorème des bornes atteintes.

**Exo 3.2**

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

**1.** $(x, y) \longmapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$.

**2.** $(x, y) \longmapsto 5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$.

**3.** $(x, y) \longmapsto x^3 + y^2 - 2xy$.

**Exo 3.3**

Soit $f(x, y) = y^2 - x^2 y + x^2$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

**1.** Représenter $D$.

**2.** Déterminer les points critiques de $f$ sur l'intérieur de $D$.

**3.** On admet que $f$ admet un maximum et un minimum sur $D$. Déterminer le minimum et le maximum de $f$ sur $D$.

### 3.4 Deux remarques

Un des intérêts des gradients est qu'il permet d'exprimer simplement la dérivée selon une direction.

**Propriété 6.**
Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $u_0 = (x_0, y_0) \in U$. Si $f$ admet des dérivées en $u_0$ selon les deux variables, alors $f$ admet des dérivées dans toutes les directions et, pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$,

$$D_{\vec{v}}(f)(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \vec{v} \rangle .$$

`Remarque 3.4.`
Une remarque que l'on fait souvent en physique est « le gradient est orthogonal aux lignes de niveau ». Qu'est-ce que cela signifie ? En quoi est-ce vrai ? Essayons de le comprendre avec la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Comment donner un sens plus général à ce que l'on a dit précédemment ? À l'aide de la **composition** de dérivées.

## 4 Composées et dérivées

Nous l'avons vu sur les deux précédentes remarques, il faut pouvoir gérer correctement la dérivation avec la composition.

**Propriété 7.**
Soient $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $I$ un intervalle, $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ et enfin $x, y \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$ deux fonctions pour lesquelles pour tout $t \in I$ : $(x(t), y(t)) \in$

$U$. La fonction $t \overset{F}{\longmapsto} f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et pour tout $t \in I$ :

$$F'(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

ou, si on ne veut pas confondre $x$ et $x$...

$$F'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t), y(t))) = x'(t)\partial_1 f(x(t), y(t)) + y'(t)\partial_2 f(x(t), y(t))$$

**Exo 4.4**

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, quelle est la dérivée de $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$ ?
2. Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$, $p = \partial_1 f$ et $q = \partial_2 f$. Exprimer à l'aide de $p$ et $q$ la dérivée par rapport à $t$ de

$$t \mapsto t^2 f(t\mathrm{e}^t, t^3 - t).$$

**Exo 4.5**

Soit $f$ une application de classe $C^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ est homogène de degré $r$ si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t > 0,\ f(tx, ty) = t^r f(x, y).$$

1. Montrer que si $f$ est homogène de degré $r$, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r - 1$.
2. Montrer que si $f$ est homogène de degré $r$ si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = rf(x, y).$$

La règle de la chaîne permet d'étendre l'idée de dérivée selon **un vecteur** pour parler de dérivée le long **un chemin**.

**Définition 10.**
Un arc paramétré $\mathscr{C}^1$ est une fonction

$$\gamma : \left| \begin{array}{l} \mathrm{I} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

telle que $x$ et $y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. On note alors

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

**Propriété 8.**
Soit $f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$.

1. Soient $I$ un intervalle et $\gamma \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ un arc paramétré à valeurs dans $U$. Alors $f \circ \gamma$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$ et pour tout $t \in I$ : $(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$.
2. La fonction $f$ possède une dérivée en tout point de $U$ dans toutes les directions et, pour tout $u_0 \in U$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ :

$$\mathrm{D}_{\vec{v}} f(u_0) = \langle \nabla f(u_0), \vec{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0)a + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0)b$$

3. Le gradient de $f$ est orthogonal aux lignes de niveau de $f$ et dirigé dans le sens des pentes croissantes.

Exemple 4.1.
Une partie $A$ de $\mathbb{R}^2$ est dite *connexe par arcs* si pour tout $u$ et $v$ dans $A$, il existe un arc paramétré $\gamma \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ tel que $\gamma(0) = u$ et $\gamma(1) = v$. Montrer que si $\nabla f = 0$ sur un ouvert $U$ connexe par arcs, alors $f$ est constante sur $U$.

On peut aller plus loin, et composer encore plus de fonctions !

**Propriété 9.**
Soient $U$ et $V$ deux ouverts de $\mathbb{R}^2, x, y \in \mathscr{C}^1(V,\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. On suppose que $(x(u,v), y(u,v)) \in U$ pour tout $(u,v) \in V$ et on pose $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$. La fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $V$ et pour tout $(u,v) \in V$ :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v)) + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))$$

Pour dire les choses plus joliment

$$\partial_1 F = \partial_1 x \partial_1 f + \partial_1 y \partial_2 f$$
$$\partial_2 F = \partial_2 x \partial_1 f + \partial_2 y \partial_2 f.$$

Exemple 4.2.
Il est indispensable de faire des exemples !

1. Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$, $p = \partial_1 f$ et $q = \partial_2 f$. Exprimer, à l'aide de $p$ et $q$, les dérivées par rapport à $x$, puis à $y$, de
   - $(x,y) \mapsto f(x-y, x+y)$
   - $(x,y) \mapsto f(y,x)$
   - $(x,y) \mapsto x^2 f(2xy, xe^y)$
2. Résoudre
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f(x,y),$$
enréalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$.
3. *Changement de coordonnées en polaire.* Vérifier que si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, alors
$$r\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
Utiliser ce changement de variables pour résoudre l'équation aux dérivées partielles $y\frac{\partial f}{\partial x} = x\frac{\partial f}{\partial y}$.
4. Résoudre sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, grâce au changement de variables $(x,y) = \left(\frac{u}{v}, \frac{v^2}{u}\right)$, l'équation aux dérivées partielles $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$.

# 5 Exercices

**Exercice 1** (*, Mines-Ponts)**.** Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On pose

$$f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ si } x \neq y \text{ et } f(x,x) = g'(x).$$

Démontrer que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)$.

**Exercice 2.** Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, une application de classe $C^1$.

1. Calculer sa dérivée la dérivée de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(tx, ty)$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. On suppose désormais que $f(tx,ty) = tf(x,y)$ pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$.
   **a)** Montrer que pour tous $x, y, t \in \mathbb{R}$, on a
   $$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$
   **b)** En déduire $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \alpha x + \beta y$.