FIN ↘

CHAPITRE 25
ESPACES EUCLIDIENS,
ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

Table des matières

1 Produit scalaire

1.1 Définition, norme associée à un produit scalaire

Définition 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est une fome bilinéaire symétrique définie positife, i.e. une application

$$\left| \begin{array}{l} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \langle x, y\rangle \end{array} \right.$$

telle que

(i) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bilinéaire, i.e. pour tout x dans E, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ est linéaire et $y \mapsto \langle y, x\rangle$ est linéaire

(ii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique, i.e. $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.

(iii) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie, i.e.

$$\forall x \in E,\ \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

(iv) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive, i.e.

$$\forall x \in E,\ \langle x, x\rangle \geqslant 0.$$

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien réel** (epr).

Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé **espace euclidien** (eve).

`Notation.`

On note le produit scalaire entre x et y de l'une de ces 5 manières : $\langle x, y\rangle, \langle x|y\rangle$, $(x|y)$, (x, y) , et $x \cdot y$

Définition 2.

Sur $\mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire usuel par

$$\langle X, Y \rangle = {}^{\mathrm{t}}XY = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

►***Démonstration.***

La preuve du fait qu'on a un produit scalaire va nous permettre de donner la **méthode** de démonstration.

- **D'abord, la symétrie.**

  Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\langle Y, X \rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle X, Y \rangle .$$

- **Puis, la bilinéarité. On montre la linéarité par rapport à la première variable et on conclut par symétrie.**

  Soit $Y_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $(X, X') \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle \lambda X + X', Y_0 \rangle &= (\lambda X + X')^{\mathsf{T}} Y_0 \\
&= (\lambda X^{\mathsf{T}} + (X')^{\mathsf{T}}) Y_0 \\
&= \lambda X^{\mathsf{T}} Y_0 + (X')^{\mathsf{T}} Y_0 = \lambda \langle X, Y_0 \rangle + \langle X', Y_0 \rangle
\end{aligned}$$

- **Puis la positivité et le caractère défini.** Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\langle X, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0,$$

d'où la positivité.

Ensuite, si $\langle X, X\rangle = 0$, alors, comme pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $x_i^2 \geqslant 0$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0 \text{ donc } X = 0.$$

D'où le caractère défini.

QED◀

Définition 3.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien réel. On définit la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ par

$$\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Propriété 1.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un epr, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Alors $\|\cdot\|$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) (positivité) $\|\cdots\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}_+$

(ii) (séparation) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

(iii) (homogénéité) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

►***Démonstration.***

(i) Immédiat car la racine carrée est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit x dans E tel que $\|x\| = 0$. Alors $\langle x, x\rangle = 0$ donc

(iii) Soit $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle x, x\rangle} \text{ par } \textbf{bi}\text{linéarité} \\ \\ &= \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &= |\lambda|\,\|x\|\,.\end{aligned}$$

***QED*◀**

On a presque une **norme**. Pour cela, il manque l'inégalité triangulaire ! Pour ce faire, on aura besoin de certaines identités.

Propriété 2.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un epr, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

(i) (identités remarquables) Pour tous x et y dans E,

- $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$,
- $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$,
- $\|x\|^2 - \|y\|^2 = \langle x+y, x-y\rangle$.

(ii) (corollaire) Pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$,

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle\,.$$

(iii) (dévleloppement d'une norme au carré) Pour tous $(x_1, \dots, x_n)$ dans E,

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle\,.$$

(iv) (identités de polarisation) Pour tous x et y dans E,

- $\langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$
- $\langle x, y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$.

►***Démonstration.***

(i) Soit $(x, y) \in E^2$.

- Déjà,

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2 \\
&= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \text{ par linéarité par rapport à la première variable.} \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \text{ par linéarité par rapport à la seconde variable.} \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \text{ par symétrie.}
\end{aligned}$$

- on fait de même et on utilise la linéarité par rapport à la seconde variable.
- même preuve ! (exercice)

(ii) C'est une récurrence.

(iii)
- Par la première identité remarquable, l'identité est immédiate.
- Immédiat en sommant les deux premières identités remarquables.

QED◄

Exo 1.1

Établir l'identité du parallélogramme

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2,$$

et l'interpréter.

Propriété 3.

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme associée.

(i) (inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient x et y dans E. Alors

$$\langle x, y \rangle \leqslant \|x\| \, \|y\| \, ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$, $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

(ii) (inégalité de Cauchy-Schwarz, 2ème version) Soient x et y dans E. Alors

$$| \langle x, y \rangle | \leqslant \|x\| \, \|y\| \, ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

(iii) (inégalité triangulaire) Soient x et y dans E. Alors

$$|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \, ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont positivement colinéaires (i.e. $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$, $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

►***Démonstration.***

(*) On a déjà fait la preuve pas mal de fois... Soient x et y dans E. Supposons x et y non nuls (sinon les inégalités sont évidentes !)

(i) Posons, pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$P(t) = \|x + ty\|^2 \, .$$

Alors, pour tout t réel,

$$P(t) = \|x\|^2 + 2\langle x, ty\rangle + \|ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|x\|^2,$$

i.e. P est un polynôme du second degré. Étant toujours positif, il est donc de discriminant Δ négatif ou nul, donc

$$(2\langle x, y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leqslant 0,$$

donc

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \|x\|^2\|y\|^2,$$

donc

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| &\Leftrightarrow \Delta = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ P(t_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ P(t_0) = 0,\ \|x + t_0 y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ P(t_0) = 0,\ x = -t_0 t \\ &\Leftrightarrow\ x \text{ et } y \text{ sont colinéaires.} \end{aligned}$$

(ii) Ensuite,

$$\langle x, y\rangle \leqslant |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|,$$

la première inégalité venant du fait qu'un réel est toujours inférieur à sa valeur absolue et la seconde étant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans toutes les inégalités. Or, on a les équivalences

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \text{ et } |\langle x, y\rangle = \|x\|\,\|y\| &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \geqslant 0 \text{ et } \exists\lambda\in\mathbb{R},\ x=\lambda y\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R},\ x=\lambda y \text{ et } \lambda\,\|y\|^2\geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R}_+,\ x=\lambda y\\ &\Leftrightarrow\ x \text{ et } y \text{ sont positivement colinéaires.}\end{aligned}$$

(iii) Finalement, pour l'inégalité triangulaire, soient x et y dans E. Alors comme les quantités $\|x+y\|$ et $\|x\|+\|y\|$ sont positives, on a l'équivalence

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|\Leftrightarrow\|x+y\|^2\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \|x\|^2+2\,\langle x, y\rangle+\|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2+2\,\|x\|\,\|y\|+\|y\|^2 \text{ par l'inégalité e Cauchy-Schwarz.}\\ &= (\|x\|+\|y\|)^2,\end{aligned}$$

d'où l'inégalité désirée. De plus il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans toutes les inégalités, i.e. si et seulement si x et y sont positivement colinéaires.

***QED*◀**

Propriété 4.

Ainsi, $\|\cdot\|$ vérifie alors les propriétés d'une norme, à savoir

(i) (positivité) $\|\cdots\|$ est une application de E dans $\mathbb{R}_+$

(ii) (séparation) $\forall x\in E,\ \|x\|=0\Rightarrow x=0$

(iii) (homogénéité) $\forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$.

(iv) (inégalité triangulaire) $\forall(x, y)\in E^2,\ \|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

Remarque 1.1.

ATTENTION ! On a vu dans le chapitre d'intégration la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$: elle n'est pas euclidienne, car elle ne découle pas d'un produit scalaire.

Exercice intéressant : le démontrer !

1.2 Les exemples les plus courants, à connaître

On définit les produits scalaires suivants, à connaître vraiment ! Sauf indication, il n'y a pas à démontrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

(1) Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y.$$

(2) Sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini ainsi : si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on définit

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \mathrm{tr}(A^\top B).$$

En effet, on a bien égalité entre les formules : si $A^\top = (\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, alors

$$\mathrm{tr}(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n} [A^\top B]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} b_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{ki}.$$

On peut vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire, mais c'est exactement comme le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.2.

Attention, il n'y a pas qu'un produit scalaire pour un sev. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si l'on définit

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 2xx' + 2yy',$$

il sagit d'un produit scalaire qui n'est pas le produit scalaire canonique !

(3) Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, on définit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Vérifions qu'il s'agit d'un produit scalaire :

- **Symétrie :** pour tout t dans $[a,b]$, $f(t)g(t) = g(t)f(t)$ donc, en intégrant, $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$.
- **Bilinéarité :** soit $g_0 \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Soient f_1 et f_2 dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \langle f_1 + \lambda f_2, g_0 \rangle &= \int_a^b (\lambda f_1 + f_2) g_0 \\ &= \int_a^b \lambda f_1 g_0 + f_2 g_0 \\ &= \lambda \int_a^b f_1 g_0 + \int_a^b f_2 g_0 \\ &= \lambda \langle f_1, g_0 \rangle + \langle f_2, g_0 \rangle \end{aligned}$$

  D'où la linéarité.

- **Positivité et caractère défini :** soit $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(t)^2 dt \geqslant 0,$$

  car pour tout t dans $[a,b]$, $f(t)^2 \geqslant 0$.
  Si $\langle f, f\rangle = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)^2 dt = 0$. Or, f^2 est **continue**, **positive**, **d'intégrale nulle**, donc pour tout t dans $[a,b]$, $f(t)^2 = 0$.
  D'où le caractère défini.

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

Remarque 1.3.

(i) Encore une fois, on n'a pas unicité du produit scalaire. Par exemple, sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$,

$$(f|g) = \int_a^b x^2 f(x)g(x)dx$$

définit tout aussi bien un produit scalaire.

(ii) **Exercice.** sur l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques sur $\mathbb{R}$,

$$\langle f|g\rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

définit un produit scalaire (c'est le caractère défini qui n'est pas immédiat).

(4) Sur $\mathbb{R}_n[X]$, penser à trois produits scalaires (*) :

- le produit scalaire canonique : si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, on définit

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

- pour tout $a < b$, le produit scalaire intégral

$$(P|Q) = \int_a^b P(t)Q(t)dt$$

est un produit scalaire.

— symétrie : ok, pour vous

— bilinéarité : ok, pour vous

— positivité : ok, pour vous

— caractère défini. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P|P) = 0$. Alors $\int_a^b P^2 = 0$.
Or, P^2 est continue, positive, d'intégrale nulle sur $[a, b]$ donc pour tout t dans $[a, b]$, $P^2(t) = 0$, i.e. $P(t) = 0$.
Alors P s'annule une infinité de fois, donc P est nul.

- le produit scalaire d'interpolation : si $(x_0, \dots, x_n)$ sont $n+1$ points distincts, on définit

$$\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$$

— la symétrie est ok.

— la bilinéarité vient de la linéarité de l'évaluation.

— caractère défini positif. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\langle P|P\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)^2 \geqslant 0,$$

avec égalité ssi pour tout i dans $[\![0, n]\!]$, $P(x_i) = 0$, i.e. ssi $P = 0$ (car $\deg(P) \leqslant n$: P s'annule donc + de fois que son degré)

`Remarque 1.4.`

Sur E le $\mathbb{R}$-ev des v.a.r. sur un univers fini. Les applications suivantes sont-elles des produits scalaires sur E ?

$$(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY) \text{ et } (X, Y) \mapsto \mathrm{Cov}(X, Y).$$

Ces formes sont bilinéaires, symétriques, positives mais **pas définies.** En effet,

- $\mathbb{E}(X^2) = 0 \Leftrightarrow X = 0$ presque sûrement (on peut avoir $X(\omega) \neq 0$ si $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 0$)
- $\mathrm{Cov}(X, X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante ps.

Exo 1.2

Quelques exercices

1. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

2. Montrer que pour toute fonction f continue ne s'annulant pas sur $[a, b]$,

$$\int_a^b f(t)dt \int_a^b \frac{1}{f(t)}dt \geqslant (b-a)^2.$$

Étudier le cas d'égalité.

2 Orthogonalité

2.1 Définitions

Définition 4.

Soit $E, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un espace préhilbertien réel, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

(i) si $(x, y) \in E^2$, x et y sont dits orthogonaux et on écrit $x \perp x$ si $\langle x, y\rangle = 0$.

(ii) si $x \in E$, on dit que x est unitaire si $\|x\| = 1$.

(iii) on dit qu'une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de vecteurs de E est orthogonale si pour tous $i \neq j$, $x_i \perp x_j$.

(iv) on dit qu'une famille $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de vecteurs de E est orthonormale ou orthonormée si elle est orthogonale et si pour tout i dans I, $\|x_i\| = 1$.

(v) si $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une base de E, on dit que $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une base orthogonale de E si la famille $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est orthogonale, et on dit qu'elle est orthonormée (BON) si la famille est orthonormée.

Propriété 5.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un epr. Alors $(x_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille orthonormée de E si et seulement si pour tous $(i, j) \in E^2$, $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{ij}$.

`Exemple 2.1.`

Trois exemples :

(i) dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une BON de $\mathbb{R}^2$.

De même, $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$, mais les vecteurs ne sont pas normés.

(ii) **ATTENTION !** La notion d'orthogonalité dépend du produit scalaire ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si on définit

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = 2xx' + 2yy',$$

alors $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ n'est plus orthogonale pour ce produit scalaire.

(iii) Dans E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$, montrons que $(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

Soit $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]$, $k \neq \ell$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(kt)\sin(\ell t)dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)t) - \cos((k+\ell)t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)t)dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)t)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k-\ell}\sin((k-\ell)t)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+\ell}\sin((k+\ell)t\right]_0^{2\pi} \\
&\text{(possible car } k \neq \ell \text{ et } k+\ell > 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(iv) Dans $\mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire canonique, $(X^k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire canonique.

Dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire d'interpolation associé à $(x_0, \ldots, x_n)$ n réels deux à deux distincts, la base d'interpolation de Lagrange associée à $(x_0, \ldots, x_n)$ est une BON. En effet, si $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$,

$$\begin{aligned}
(L_i|L_j) &= \sum_{k=0}^{n} L_i(x_k)L_j(x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.2.

Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la base canonique est une BON pour le produit scalaire canonique.

Propriété 6.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un epr.

(i) Le seul vecteur orthogonal à tous les autres est le vecteur nul.

(ii) En particulier, deux éléments x et y sont égaux si et seulement si pour tout z de E, $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$.

►***Démonstration.***

1. Soit $x_0 \in E$ tel que pour tout y dans E, $x \perp y$. Alors $x \perp x$ donc $\langle x, x\rangle = 0$, donc $x = 0$.

2. Soit $(x, y) \in E^2$.

Déjà, si $x = y$, alors pour tout $z \in E$, $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$.

Réciproquement, si pour tout z dans E, $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$.

Alors, pur tout z dans E, $\langle x, z\rangle - \langle y, z\rangle = 0$, i.e. $\langle x - y, z\rangle = 0$, i.e. $x - y \perp z$, donc, par le premier point, $x - y = 0$, i.e. $x = y$.

QED◄

Propriété 7 (Théorème de Pythagore).

Soit $E, \langle \cdot, \cdot\rangle$ un espace préhilbertien réel

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(ii) pour toute famille orthogonale $(x_1, \ldots, x_n)$ de E, $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$.

►***Démonstration.***

1. Raisonnons par équivalences. Soit $(x, y) \in E^2$. On a les équivalences

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 &\Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\
&\Leftrightarrow 2\langle x, y\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow x \perp y
\end{aligned}$$

2. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, alors

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

QED◀

`Remarque 2.3.`

La réciproque de Pythagore est fausse pour $n \geqslant 3$ vecteurs ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, si

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alros

$$\|u+v+w\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 4$$

et

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Mais $\langle u, w \rangle = -1 \neq 0$.

Explication. Il y a des compensations sur les produits scalaires !

$$\|u+v+w\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\left(\langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle\right).$$

Propriété 8.

Soit $E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un espace préhilbertien réel. Toute famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul est libre. En particulier, toute famille orthonormale est libre.

`Remarque 2.4.`

Attention, ce n'est pas une équivalence ! Il y a des familles libres non orthogonales. Ainsi, dans $\mathbb{R}^2$, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre non orthogonale.

►*Démonstration.*

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^p$ telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. Alors

$$\left\langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = \langle 0_E, x_j \rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc, par linéarité par rapport à la première variable,

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \langle x_i, x_j \rangle = 0.$$

Mais, si $i \neq j$, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ car la famille est orthogonale, donc

$$\lambda_j \langle x_j, x_j \rangle = 0, \text{ i.e. } \lambda_j \|x_j\|^2 = 0,$$

i.e. $\lambda_j = 0$ car $x_j \neq 0$. Donc la famille est libre. ***QED*◀**

C'est du jamais vu, une condition extrêmement facile de liberté... ! ! Du coup si on a une famille de n vecteurs orthogonaux, bim c'est une base de E !

2.2 Sous-espace orthogonal

Définition 5.

Soit E un epr, A une partie de E. On définit l'orthogonal de A par

$$A^{\perp} = \{x \in E, \ \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E qui sont orthogonaux à tous les éléments de A.

`Exemple 2.5.`

1. On a déjà vu que $E^{\perp} = \{0_E\}$.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, l'orthogonal d'une droite passant par 0 est sa perpendiculaire (au sens « collège » du terme) passant par 0.

Propriété 9.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie de E. Alors

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E,
2. si $B \subset E$, si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$,
3. $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$,
4. si A est un sev de E et $(e_1, \dots, e_r)$ une famille génératrice de A, alors pour tout x dans E,

$$x \in A^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, r]\!],\ \langle x, e_i \rangle = 0.$$

5. $A \subset \left(A^\perp\right)^\perp$.

► ***Démonstration.***

1. Déjà, $0_E \in A^\perp$ car pour tout a dans A, $\langle 0_E, a \rangle = 0$.

   Ensuite, soit $(x, y) \in \left(A^\perp\right)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in A$. Alors

$$\langle \lambda x + y, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle = \lambda.0 + 0 = 0.$$

   Donc $A^\perp$ est un sev de E.

2. Soit $x \in B^\perp$. Montrons que $x \in A^\perp$.

   Soit $a \in A$. Alors $a \in B$, donc $\langle x, a \rangle = 0$.

   Donc $x \in A^\perp$, d'où l'inclusion désirée !

3. • Déjà, $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ donc $\mathrm{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$.

   • Ensuite, soit $x \in A^\perp$, montrons que $x \in \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

   Soit $b \in \mathrm{Vect}(A)$. On dispose alors de $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$, de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $b = \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$.
   Donc

$$\langle x, b \rangle = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, a_i \rangle = 0,$$

d'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

4. Évident car $A = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

5. Soit $a \in A$.

Soit $x \in A^\perp$. Alors $\langle a, x \rangle = 0$.

Donc $a \in \left(A^\perp\right)^\perp$.

***QED*◀**

`Remarque 2.6.`

1. On n'a pas, en général, $A = (A)^\perp$.

Déjà, A n'est pas nécessairement un sev, et, même si c'en est un, on a des contre-exemples en dimension infinie.

2. De même, on n'a pas, en général, l'implication $B^\perp \subset A^\perp \Rightarrow A \subset B$.

Donnons une définition plus générique de l'orthogonalité de deux sous-espaces :

Définition 6.

Deux sev F et G d'un epr $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont dits orthogonaux si

$$\forall f \in F,\ \forall g \in G,\ \langle f, g \rangle = 0.$$

On note $F \perp G$.

On a immédiatement la

Propriété 10.

Deux sev F et G orthogonaux d'un epr $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont en somme directe.

►***Démonstration.***

Soit $x \in F \cap G$. Comme $x \in F$ et $x \in G$, alors $\langle x, x \rangle = 0$, donc, par caractère défini du produit scalaire, $x = 0$.

***QED*◀**

Ceci permet de donner des résultats positifs en dimension finie.

Propriété 11.

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un epr, F un sev de E.

1. Si F admet un supplémentaire G tel que F et G sont orthogonaux, alors $G = F^\perp$, et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

2. Si u est un vecteur non nul, alors $\mathrm{Vect}(u)^\perp$ est un hyperplan, supplémentaire à u.

3. Si E est euclidien alors E admet une base orthogonale (et donc une base orthonormée).

4. Si F est de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$ et $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

5. Si E est euclidien, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Définition 7.

Dans le cas où $F \oplus F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est **le** supplémentaire orthogonal de F.

▶***Démonstration.***

1. Montrons que $G = F^\perp$.

$\boxed{\subset}$ Soit $g \in G$. Par hypothèse, pour tout f dans F, $\langle g, f\rangle = 0$, donc $g \in F^\perp$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in F^\perp$. On sait que $F \oplus G = E$, donc on dispose de $f \in F$, $g \in G$ tels que $x = f + g$.

Comme $x \in F^\perp$, $\langle x, f\rangle = 0$, donc

$$\begin{aligned} &\langle f+g, f\rangle = 0 \\ \text{donc } &\langle f, f\rangle + \langle g, f\rangle = 0 \\ \text{d'où } &\langle f, f\rangle = 0 \text{ car } F \perp G, \end{aligned}$$

donc $f = 0$ par caractère défini du produit scalaire.

Donc $x = g$, donc $x \in G$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité.

On en déduit, par le même raisonnement, que $F = G^\perp = (F^\perp)^\perp$.

2. On remarque simplement que $\mathrm{Vect}(u)^\perp = \ker(x \mapsto \langle u, x\rangle)$. Donc il s'agit du noyau d'une forme linéaire non nulle, donc c'est un hyperplan.

3. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E.

- si $n = 1$, on prend $u \in E$ tel que $u \neq 0_E$. Alors $\dfrac{u}{\|u\|}$ est une BON de E.
- si la proposition est vraie au rang n, soit E de dimension $n+1$. Soit u un vecteur non nul de E, on pose $e_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$. Alors $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est un hyperplan, donc de dimension n. Par hypothèse de récurrence, on dispose d'une base orthonormée $(e_2, \dots, e_{n+1})$ de H. Alors $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ est une famille orthonormé de E, donc libre, à $n+1$ vecteurs, c'est donc une base de E.

4. On suppose que F est de dimension finie. Montrons que $F \oplus F^\perp = E$. Soit pour cela $(e_1, \dots, e_r)$ une BON de F. Soit $x \in E$.

Analyse. On suppose que $x = f + g$ où $f \in F$ et $g \in F^\perp$. Comme $f \in F$,

$$f = \sum_{i=1}^{r} \langle f, e_i\rangle\, e_i$$

(propriété de décomposition sur une BON)

Soit alors $i \in [\![1, r]\!]$. Comme $g \perp e_i$,

$$\langle x, e_i\rangle = \langle f, e_i\rangle + \langle g, e_i\rangle = \langle f, e_i\rangle\,,$$

donc

$$f = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i\rangle\, e_i \text{ et } g = x - f.$$

Synthèse. Posons

$$f = \sum_{i=1}^{r} \langle x, e_i \rangle \, e_i \text{ et } g = x - f.$$

Alors

- par définition, $f \in F$.
- $f + g = x$.
- pour montrer que $g \in F^\perp$, il suffit de montrer que g est orthogonal à tous les éléments d'une base de F. Soit $j \in [\![1, r]\!]$. Alors

  $$\langle g, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle f, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_f \rangle = 0,$$

  car $\langle f, e_j \rangle$ est la coordonnée de f selon e_j.

QED◀

Dans le cas des hyperplans, il y a très peu de choix pour le supplémentaire orthogonal.

2.3 Bases orthonormales

Propriété 12 (Coordonnées dans une base orthonormale).

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien rée, $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base orthonormée de E (on suppose qu'elle existe).

(i) si $x \in E$, la coordonnée de x selon e_i est $\langle x, e_i \rangle$.

(ii) si $i \in \mathrm{I}$ et e_i^* est la forme linéaire coordonnée associée à e_i,

$$e_i^* : x \mapsto \langle x, e_i \rangle .$$

(iii) si $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle \langle y, e_i\rangle .$$

En particulier,

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle^2 .$$

(iv) si E est euclidien (de dimension finie), si X et Y sont les vecteurs des coordonnées de x et y dans $(e_1, \dots, e_n)$, alors

$$\langle x, y\rangle = {}^{\mathrm{t}}XY,\ \|x\| = \sqrt{{}^{\mathrm{t}}XX}.$$

►***Démonstration.***

1. Soit x dans E, $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle.

Soit $j \in I$,

$$\begin{aligned}\langle x, e_j\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle \\ &= \sum_{i\in I} \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j.\end{aligned}$$

2. C'est juste la reformulation du point précédent !

3. Soit $(x, y) \in E^2$, $x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$ et $y = \sum_{j\in I} \langle y, e_j\rangle e_j$. Alors, si l'on note, pour tout i dans I,

$\lambda_i = \langle x, e_i \rangle$ et $\mu_j = \langle y, e_i \rangle$,

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i e_i, \sum_{j \in \mathrm{I}} \mu_j e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i \in \mathrm{I}} \sum_{j \in \mathrm{I}} \lambda_i \mu_j \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \sum_{i \in \mathrm{I}} \sum_{j \in \mathrm{I}} \lambda_i \mu_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \mu_i \\
&= \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle .
\end{aligned}$$

4. Si E est euclidien et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une BON de E,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i \text{ et } y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, e_i \rangle e_i,$$

alors

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix} \text{ et } Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} \langle y, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

Mais alors

$$X^{\mathsf{T}} Y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle = \langle x, y \rangle .$$

QED◄

Propriété 13.

Toute famille orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.

Propriété 14 (et def).

Soit E un eve, H un hyperplan de E. Alors le supplémentaire orthogonal de H est une droite.

Chacun des deux vecteurs directeurs unitaires de cette droite est appelé vecteur normal à H.

On définit alors l'orientation directe de H par rapport à un vecteur unitaire a.

2.4 Projection orthogonale

Une fois qu'on a défini les supplémentaires orthogonaux, il est naturel de définir la notion de projection orthogonale (qui est, encore une fois, plus simple que les projections en général car beaucoup plus explicites !)

Définition 8.

Soit E un epr, F un sev de E. La projection orthogonale π_F sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Propriété 15.

Soit E un epr, F un sev de dimension finie de E, de base $(e_1, \dots, e_p)$, π_F la projection orthogonale sur F. Alors pour tout x dans E,

$$\pi_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle \, e_k.$$

PREUVE* On a donc une vraie formule pour le projeté orthogonal !

Ce projeté orthogonale a une chouette propriété : il minimise une distance !

Propriété 16.

Soit E un eps, $x \in E$ et F un sev de dimension finie de E. La quantité $\inf\{\|x - y\|, y \in F\}$ existe et est atteinte par le projeté orthogonal de x sur F. On la note $d(x, F)$.

Exemple 2.7.

Deux exemples/exercices :

(i) Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathscr{B} = (i, j, k)$.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ déterminé par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

(ii) Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^2 - at - b)^2 dt$.

Remarque 2.8.

On définit de même les symétries orthogonales. Ces symétries ont la jolie propriété de préserver la norme : ce sont des isométries !

2.5 Orthonormalisation

On termine par une application de la notion de projection orthogonale : c'est l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Théroème 17 (procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre d'un espace préhilbertien réel E.

Il existe au moins une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ telle que pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ (que l'on notera F_k).

Une telle famille peut-être définie par récurrence comme suit :

- on pose $\varepsilon_1 = x_1$, puis $e_1 = \pm\dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}$,
- pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, si $(e_1, \dots, e_k)$ sont construits, on pose

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \pi_{F_k}(x_{k+1}) = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i \rangle\, e_i$$

et $e_{k+1} = \pm\frac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|}$.

►***Démonstration.***

On montre le résultat par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$.

Initialisation. Pour $k = 1$, si (x_1) est une famille libre, $e_1 = \pm\frac{x_1}{\|x_1\|}$ est bien normé.

Hérédité. Soit k dans $[\![1, n-1]\!]$ tel que la proposition est vraie au rang k : supposons que $(e_1, \dots, e_k)$ soient construits.

- on veut que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$.

  Or, par hypothèse de récurrence, $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k,\ x_{k+1})$, donc on dispose de $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que

  $$e_{k+1} = \lambda_{k+1}x_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i.$$

  Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Alors

  $$0 = \langle e_{k+1}, e_j\rangle = \lambda_{k+1}\langle x_{k+1}, e_j\rangle + \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \lambda_{k+1}\langle x_{k+1}, e_j\rangle + \lambda_j.$$

  Donc $\lambda_j = -\lambda_{k+1}\langle x_{k+1}, e_j\rangle$. Donc

  $$e_{k+1} = \lambda_{k+1}\varepsilon_{k+1},$$

  où $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i$. Mais, comme $\|e_{k+1}\| = 1$, $|\lambda_{k+1}| = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}$, d'où l'unicité, au signe près, de e_{k+1}.

- **Synthèse.** Si l'on pose $\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, e_i\rangle e_i$, alors ε_{k+1} n'est pas nul (sinon x_{k+1} appartiendrait à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, ce qui contredit la liberté de $(x_1, \dots, x_{k+1})$). Donc on peut poser $e_{k+1} = \pm\frac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|}$.

  Ensuite,

  — le fait que e_{k+1} soit de norme 1 est immédiat (on a divisé un vecteur par sa norme).

— si $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{k+1}, e_j \rangle &= \left\langle x_{k+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \, e_i, e_j \right\rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle x_{k+1}, e_k \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle x_{k+1}, e_i \rangle \, \delta_{ij} \\ &= \langle x_{k+1}, e_k \rangle - \langle x_{k+1}, e_k \rangle = 0,\end{aligned}$$

d'où ε_{k+1} est orthogonal à $(e_1, \ldots, e_k)$ donc, comme e_{k+1} est colinéaire à ε_{k+1}, e_{k+1} est orthogonal à $(e_1, \ldots, e_k)$.

— Enfin, e_{k+1} est une combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_k, x_{k+1})$ avec un coefficient non nul devant x_{k+1}, donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}) &= \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k, x_{k+1}) \\ &= \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) \text{ par hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

QED◀

`Remarque 2.9.`

Plusieurs remarques importantes :

1. il faut pouvoir illustrer ce procédé !
2. Si E est euclidien, si $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre de E et si $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt, alors $\mathcal{X}$ et $\mathcal{E}$ sont des bases de E et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{X}}(\mathcal{E})$ est triangulaire supérieure !

> **Propriété 18.**
>
> Si l'on rajoute dans la propriété précédente la contrainte $\langle e_k, x_k \rangle > 0$, une telle famille est unique.

`Exemple 2.10.`

Orthonormalisons $(1, X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ par le produit scalaire

$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

On note $(P_0, P_1, P_2) = (1, X, X^2)$.

1. $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_0^1 1dt = 1$, on pose donc $R_0 = 1$.

2. On note

$$Q_1 = P_1 - (R_0|P_1)R_0 = X - \int_0^1 tdt = X - \frac{1}{2}$$

Puis on calcule $\|Q_1\|$:

$$\|Q_1\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left[\left(t - \frac{1}{3}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

On pose alors

$$R_1 = \frac{Q_1}{\|Q_1\|} = \sqrt{12}\left(X - \frac{1}{2}\right)$$

3. Enfin, on calcule

$$\begin{aligned} Q_2 &= P_2 - (P_2|R_0)R_0 - (P_2|R_1)R_1 \\ &= P_2 - (P_2|Q_0)\frac{Q_0}{\|Q_0\|^2} - (P_2|Q_1)\frac{Q_1}{\|Q_1\|^2} \end{aligned}$$

Or,

- $(P_1|R_0) = \displaystyle\int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$,
- $(P_1|Q_1) = \displaystyle\int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{12}$,

donc

$$Q_2 = X^2 - \frac{1}{3} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - X + \frac{1}{6}.$$

Or,

$$\|Q_2\|^2 = \int_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)^2 dt = \frac{1}{180},$$

donc on pose

$$R_2 = \sqrt{180}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right).$$

On a ainsi trouvé (R_0, R_1, R_2) l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de (P_0, P_1, P_2).

On termine par une jolie propriété (hors-programme)

> **Propriété 19 (**Théorème de représentation de Riesz, HP).
>
> Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, φ une forme linéaire sur E. Il existe un unique vecteur u de E tel que
>
> $$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u, x\rangle\,.$$

►***Démonstration.***

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E.

Analyse. On suppose qu'il existe u tel que pour tout x, $\varphi(x) = \langle x, u\rangle$.

Alors, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = \langle e_i, u\rangle$.

Donc

$$u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i\rangle\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i$$

QED◄

`Exemple 2.11.`

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

(en effet, il suffit de prendre $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire intégral, $\varphi : P \mapsto P(0)$)

DEBUT ↖