

FIN ↘

CHAPITRE 24

SÉRIES CONVERGENTES ET FAMILLES SOMMABLES

Table des matières

1	Généralités	1
1.1	Séries convergentes, divergentes	1
1.2	Séries à termes positifs	6
2	Comparaison série-intégrale	9
3	Séries à termes quelconques	13
3.1	Convergence absolue	14
3.2	Séries alternées	16
4	Familles sommables	18
4.1	Familles à termes positifs	19
4.2	Familles quelconques	23

1 Généralités

1.1 Séries convergentes, divergentes

Notre but est d'étudier des **séries**, c'est-à-dire des « sommes infinies ». Comme nous avons bien avancé dans l'année, bien sûr que nous n'allons pas parler de sommes infinies.

Définition 1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

1. La **série de terme général** (parfois abrégé en stg) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la **suite** $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On note parfois $\sum u_n$ la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (**cf. remarque ci-dessous**)
3. Si $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n u_k$ est appelée n -ième somme partielle.
4. On dit que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si $\sum_{k=0}^n u_k$ tend vers une limite finie ℓ .
On note alors $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et on l'appelle « somme de la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ». Sinon, on dit qu'elle diverge.
5. Si la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, le reste d'ordre n est

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 1.1.

ATTENTION ! La notation $\sum u_n$ est une **notation**, parfois très piégeuse, car il y a une variable non déclarée, ne **JAMAIS** utiliser $\sum u_n$ dans un calcul.

Exemple 1.2.

1. On sait que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Ainsi, la série de terme général $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2. On appelle la série harmonique $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la série de terme général $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$: $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On a déjà vu (3 ? 4 fois ?) que $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Nous allons le redémontrer, mais c'est un bon moment pour essayer de vous rappeler une des méthodes vues en classe à ce sujet ?

Par linéarité de la limite, on a la

Propriété 1.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ converge, alors $\sum \lambda u_n + \mu v_n$ converge.

► Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et $\ell' = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$. Alors

$$\sum_{k=0}^n \lambda u_k + \mu v_k = \lambda \sum_{k=0}^n u_k + \mu \sum_{k=0}^n v_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \ell + \mu \ell'.$$

Ceci conclut la preuve.

QED ◀

Comment être sûr qu'une série ne converge pas ? Grâce à la

Propriété 2.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

2. Si la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

► **Démonstration.**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$.
2. Si la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ converge, alors on dispose de $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. On en conclut que $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell - \ell = 0$.

Ceci conclut la preuve.

QED ◀

Définition 2.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, on dit que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge grossièrement**.

Remarque 1.3.

ATTENTION ! La réciproque est très très fausse :

$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ **MAIS** on n'a pas $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge !

De cette proposition, on déduit la

Propriété 3 (Séries géométriques).

Soit $a \in \mathbb{C}$. Alors

1. si $|a| \geq 1$, la série de terme général $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge grossièrement.
2. si $|a| < 1$, la série de terme général $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-a}$.

► **Démonstration.**

Déjà, si $|a| \geq 1$, $(a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, donc $\sum a^n$ diverge grossièrement. . Ensuite, si $|a| < 1$, alors

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - a}.$$

QED ◀

Exo 1.1

Démontrer que $0,9999\ldots = 1$ (où il y a une infinité de 9 à gauche).

L'étude des séries est fondamentalement liée à celle des suites. La proposition suivante en est une autre illustration :

Propriété 4 (Lien suites-séries).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

► Démonstration.

Notons, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k$. Alors, par télescopage, $S_n = a_{n+1} - a_0$. Ainsi, on a les équivalences

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (a_{n+1} - a_0)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}.$$

QED ◀

Exemple 1.4.

Illustrons ce résultat par deux exemples :

1. L'utilisation de **suites** pour démontrer la convergence de **séries** : la série de terme général $\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge. En effet, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc la série de terme général $\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2. L'utilisation de **séries** pour étudier des **suites** (c'est le plus joli !)

Revenons sur le DM12 (sur l'équivalent de Stirling, à l'époque la numérotation était chaotique !). Notre

but est de démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. On pose alors

$$u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n},$$

et on montre que $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle. Pour ce faire, on étudie la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

(refaites le calcul mais il est dans le DM12)

On doit ensuite démontrer que la série de terme général $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge...

Mais comment faire ?

1.2 Séries à termes positifs

Il est temps de trouver des moyens de démontrer la convergence de séries numériques. On commence avec des séries à termes positifs (ou positifs à partir d'un certain rang, cela ne change pas grand chose). Pourquoi aime-t-on ces séries ? Parce que...

Propriété 5.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels **positifs** et, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

1. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge.
3. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 1.5.

Bien sûr, la propriété précédente fonctionne aussi si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

► Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît.
2. Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.
3. On sait que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et convergente, donc elle est inférieure ou égale à sa limite.

QED ◀

Ce résultat permet d'obtenir la

Propriété 6 (Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs).

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels **positifs**.

1. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
2. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
3. si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum v_n$ converge **si et seulement si** $\sum u_n$ converge.

► **Démonstration.**

On ne prouve que le premier point : si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$; si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$!

Supposons donc que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge. Alors on dispose de $C > 0$ et de $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$u_k \leq C v_k.$$

Ainsi, si $n \geq N$

$$\sum_{k=N}^n u_k \leq C \sum_{k=N}^n v_k \leq C \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

la dernière inégalité venant du fait que $\sum v_n$ converge. Ainsi, pour tout $n \geq N$,

$$\sum_{k=0}^n u_k \leq \underbrace{\sum_{k=0}^N u_k}_{\text{indépendant de } n} + C \sum_{k=0}^{+\infty} v_k,$$

donc $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc elle converge.

QED ◀

Remarque 1.6.

1. Là, on va vraiment s'amuser à appliquer le cours d'analyse asymptotique !
2. Les contraposées sont aussi intéressantes : si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge !

Exemple 1.7.

- On va montrer d'une manière très simple que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
On remarque que pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Comme $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge, on en déduit, par **comparaison des séries à termes positifs**, que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
- On en déduit que pour tout $s \geq 2$, $\sum \frac{1}{n^s}$ converge : en effet, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n^s} \leq \frac{1}{n^2}$. Ainsi, par **comparaison des séries à termes positifs**, $\sum \frac{1}{n^s}$ converge.
- On conclut la preuve de l'équivalent de Stirling ! On avait

$$v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(le calcul n'est pas immédiat, il faut faire un dl pour s'en rendre compte)

On en déduit que $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$, terme général d'une série convergente, donc, **par comparaison des séries à termes positifs** (on sait qu'au voisinage de $+\infty$, v_n est du signe de $\frac{1}{12n^2}$), on en déduit que $\sum v_n$ converge. Ainsi, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge !

Méthode 1.

Pour déterminer la convergence ou non d'une série, on commence par essayer de faire un **équivalent** de son terme général.

Faire un équivalent est mieux que le reste :

- l'équivalent donne le signe de la suite à partir d'un certain rang,
- l'équivalent $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ assure que si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge **et que** si $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n$ diverge !

Exo 1.2

Déterminer la nature des séries suivantes :

- la série de terme général $\frac{2n^2 + 2}{3n^6 + 1}$,
- la série de terme général $\frac{2^n + 3n^2}{3^{2n} - n3^n}$
- la série de terme général $\frac{\sin(n) + 2^n}{n^2 \cdot 2^n + n^5}$,
- la série de terme général $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} - \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

2 Comparaison série-intégrale

Dans cette partie, nous allons étudier beaucoup plus précisément les séries dites de Riemann et la méthode dite de la **comparaison série-intégrale**.

Méthode 2.

Soit f une fonction positive, décroissante. Alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inégalités

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt,$$

ou encore

$$\int_1^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt.$$

Il s'agit bien d'une **méthode**, pas d'une proposition : il faudra toujours adapter à la situation (parfois, on prendra une fonction croissante, parfois, la somme partira de 2, etc. !)

De cette méthode, on en déduit la

Propriété 7 (Critère de convergence des séries de Riemann).

Soit $s \in \mathbb{R}$. Alors la série de terme général $\frac{1}{n^s}$ converge si et seulement si $s > 1$.

► **Démonstration.**

- Déjà, si $s \leq 0$, alors $\frac{1}{n^s}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge grossièrement.
- Ensuite, si $s = 1$, alors on fait une comparaison série-intégrale : on sait que pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$$

Ainsi, si $n \geq 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n , on en déduit que

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \int_1^n \frac{dt}{t},$$

d'où

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n),$$

ou encore

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{\boxed{k=1}}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

Mais $\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'où la divergence de $\sum \frac{1}{k}$.

- Puis, si $s \in]0, 1[$, on peut directement dire que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$. Comme $\sum \frac{1}{k}$ diverge, $\sum \frac{1}{k^s}$ aussi.
- Enfin, si $s > 1$, on fait... une comparaison série-intégrale ! Soit $k \geq 2$. Alors

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s}$$

Ainsi, si $n \geq 2$, en sommant l'inégalité précédente pour k allant de 2 à n , on en déduit que

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \leq \int_1^n \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{2^{s-1}} \right) &\leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^s} \\ &\leq \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{1-n^{s-1}} \right) \\ &\leq \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \leq 1 + \frac{1}{s-1},$$

donc la suite des sommes partielles est croissante et majorée, elle converge alors !

QED ◀

Exemple 2.1 *Prolongements classiques.*

1. Équivalent de la série harmonique. La comparaison série-intégrale permet de déterminer facilement des **équivalents** des sommes partielles ou des restes des séries ! Par exemple, on sait que si $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, alors $H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$, mais peut-on en avoir un équivalent ? OUI ! On repart de la comparaison série-intégrale :

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

Ainsi, comme

$$\begin{aligned} \ln(n+1) - \ln(2) + 1 &= \ln \left(n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) - \ln(2) + 1 \\ &= \ln(n) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln(2) + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n), \end{aligned}$$

et que $\ln(n) + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$, on en déduit, en divisant l'inégalité par $\ln(n)$ et par théorème d'encadrement,

que $\boxed{H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$.

- 2. Déterminons alors le fait que, de plus $H_n - \ln(n)$ converge.** Ce n'est pas forcément évident ! Pour cela, on va exprimer $\ln(n)$ comme la somme partielle d'une série !

$$\begin{aligned} H_n - \ln(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - (\ln(k+1) - \ln(k)) \\ &= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k^2},$$

donc, par comparaison à une série à termes positifs, la série de terme général $\left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, donc $(H_n - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie !

Point culture. On appelle cette limite γ , ou « constante d'Euler ». On vient donc de démontrer que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

- 3. Équivalent du reste d'une série de Riemann convergente.** Désormais, si $s > 1$, on peut vouloir chercher un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. On sait, par la comparaison série-intégrale, que

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s}.$$

Ainsi, si $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ et $N \geq n$, on en déduit que

$$\sum_{k=n}^N \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^s} \leq \sum_{k=n}^N \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\int_n^{N+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^s} \leq \int_{n-1}^N \frac{dt}{t^s},$$

donc

$$\frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{(N+1)^{s-1}} \right) \leq \sum_{k=n}^N \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{s-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{s-1}} - \frac{1}{N^{s-1}} \right),$$

d'où, en prenant la limite $N \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{(s-1)n^{s-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(s-1)(n-1)^{s-1}}.$$

Ceci assure que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(s-1)n^{s-1}}$.

Exo 2.3

[Séries de Bertrand] Soit $\alpha > 0, \beta > 0$. Démontrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \dots$

- converge si $\alpha > 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$,
- diverge si $\alpha < 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1$.

Indications.

- si $\alpha > 1$, montrer que $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \right)$,
- si $\alpha < 1$, montrer que $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o \left(\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \right)$,
- si $\alpha = 1$, faire une comparaison série-intégrale, en remarquant que $\frac{1}{t \cdot \ln(t)^\beta}$ est de la forme « $\frac{u'}{u^\beta}$ ».

Voilà donc un superbe outil pour mieux comprendre certaines séries !

Mais que se passe-t-il lorsque les séries ne sont pas à termes positifs ?

3 Séries à termes quelconques

La meilleure manière de démontrer la convergence d'une série à termes quelconques, c'est de se ramener à des séries à termes positifs !

3.1 Convergence absolue

Définition 3.

Une série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge absolument si la série de terme général $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exemple 3.1.

On a vu (et on le reverra ici !) que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$, donc la série de terme général $\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge, mais ne converge **pas** absolument : la série de terme général $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est autre que la série harmonique, elle diverge donc !

En revanche, la série de terme général $\frac{i^n}{n^2}$ converge absolument !

L'intérêt de cette définition est la

Propriété 8.

Une série qui converge absolument converge. (l'exemple ci-dessus montre que la réciproque est fausse)

► Démonstration.

Cas des suites réelles. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de **réels** telle que $\sum |u_n|$ converge. On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \text{ et } u_n^- = \max(-u_n, 0).$$

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -3, 2, 4, -2, -5, \dots)$, $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 2, 4, 0, 0, \dots)$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}} = (0, 3, 0, 0, 2, 5, \dots)$: on prend la partie positive de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un côté, et la partie négative de l'autre.

Alors, on a immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_n^+ - u_n^- \text{ et } |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$

Comme $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites positives, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n^+ \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq u_n^- \leq |u_n|.$$

Par **comparaison des séries à termes positifs**, $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Donc $\sum u_n^+ - u_n^-$ converge, donc la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Cas des suites complexes. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que $\sum |u_n|$ converge. On écrit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = \Re(u_n) + i\Im(u_n)$. Mais, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$0 \leq |\Re(u_n)| \leq |u_n| \text{ et } 0 \leq |\Im(u_n)| \leq |u_n|,$$

donc les séries de termes généraux $(\Re(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\Im(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent absolument, donc convergent, donc la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. **QED** ◀

Méthode 3.

Pour montrer que $\sum u_n$ converge, on essaie de faire un équivalent de $|u_n|$: s'il est simple, et s'il s'agit du terme général d'une série convergente, alors on peut dire que la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge absolument, donc converge.

Plus rapidement, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Mais que se passe-t-il lorsqu'on n'a pas de convergence absolue ? On a un critère, que l'on a déjà fait intégralement dans le chapitre de suites !

3.2 Séries alternées

Propriété 9 (Critère des séries alternées).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, qui décroît et tend vers 0.

Alors la série de terme général $((-1)^n u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

► **Démonstration.**

On a déjà fait intégralement cette preuve ! On note, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

- On montre que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

— soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+2} u_{2n+2} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0, \end{aligned}$$

donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

— soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{2n+3} u_{2n+3} + (-1)^{2n+2} u_{2n+2} = u_{2n+2} - u_{2n+3} \geq 0, \end{aligned}$$

donc $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ décroît.

— Enfin, si $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite ℓ .

- Donc les suites extraites d'indices pairs et impairs de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

D'où le résultat !

QED ◀

Remarque 3.2.

La preuve précédente permet de mieux comprendre le reste des séries alternées : en effet, on sait qu'alors

$$S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n},$$

donc $\ell - S_{2n} \leq 0$ donc $R_{2n} \leq 0$, c'est-à-dire que $\sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \leq 0$ et, de même, $R_{2n+1} \geq 0$.

Pour résumer **le signe de R_n est dicté par le premier terme de R_n .**

Mieux encore, mais nous n'en ferons vraiment pas grand chose en sup... (en revanche, en spé, cela sera incroyable) :

- comme $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$, en soustrayant S_{2n} , $-u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$, donc $|R_{2n}| \leq u_{2n+1}$,
- comme $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n+2}$, en soustrayant S_{2n+1} , $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.

Ainsi, le reste est majoré, en valeur absolue, par la valeur absolue de son premier terme.

En MPSI, il faut **surtout** pouvoir faire des exemples !

Exemple 3.3.

1. Si $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, alors $\sum u_n$ converge, car $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante, tendant vers 0.
2. **IMPORTANT** : ceci donne un contre exemple au théorème de comparaison des séries à termes positifs...

quand on enlève l'hypothèse de positivité !

Si $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge. **MAIS** $\sum u_n$ diverge : en effet, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère des séries alternées et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge !

Méthode 4.

Lorsqu'on a un terme général dont l'équivalent n'est pas de signe constant, il **faut** poursuivre le dl plus loin !

Exemple. Si $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$, déterminons la nature de la série de terme général $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Naïvement, on pourrait vouloir dire « $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n}$ »... oui, et alors ?? Cela ne suffit pas !

En revanche, si l'on poursuit le dl :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

alors

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + v_n, \text{ où } v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère des séries alternées, $\sum -\frac{1}{2n^2}$ converge par le critère des séries de Riemann et $\sum v_n$ converge par comparaison à une série de Riemann.

Exo 3.4

Regarder l'exercice 2 du TD !

Exemple 3.4 *Un petit exemple pour motiver la suite.*

Considérons $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$ et calculons, de deux manières différentes, $S + \frac{1}{2}S$. Qu'observe-t-on ?

4 Familles sommables

De même qu'au chapitre 2, nous avons vu les sommes simples, puis les sommes doubles, de même nous allons essayer de donner un sens et des règles de calcul pour les séries doubles. De même, on se demandera s'il est possible de sommer sur $\mathbb{Z}$, ou même sur de plus gros ensembles, certaines familles de termes.

Dans toute cette section, on parlera de familles indexées sur I ou sur J , il faut vraiment avoir en tête que ces ensembles seront souvent $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, etc.

4.1 Familles à termes positifs

Définition 4.

On définit dans $[0, +\infty]$ les règles de calcul suivantes :

- $\forall \lambda \in [0, +\infty], \lambda + \infty = +\infty,$
- $0 \times +\infty = 0,$
- $\forall \lambda \in]0, +\infty[, \lambda \times (+\infty) = +\infty$
- On définit

$$\sup[0, +\infty] = +\infty \text{ et } \sup \emptyset = 0.$$

► Démonstration.

Pour le dernier point, on peut le « prouver » : le seul élément qui majore $[0, +\infty]$ est $+\infty$, c'est donc son maximum, donc sa borne supérieure. De même, tout élément de $[0, +\infty]$ majore $\emptyset$, donc 0 est bien le plus petit de ses majorants. **QED**◀

Maintenant, si I est un ensemble quelconque et $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels **positifs** indexée sur I , il faut donner un sens à la « somme » $\sum_{i \in I} a_i$. Revenons sur deux types d'ensembles I déjà vus en classe :

- dans le chapitre 2, lorsque I est fini, nous ne nous sommes posés aucune question sur l'existence d'une telle somme.
- dans la section précédente, nous avons dit que, lorsque $I = \mathbb{N}$, la somme $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ existait si $\sum_{i=1}^n a_i$ admettait une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

Mais, avec nos considérations sur le travail dans $[0, +\infty]$, on pourrait très bien dire que si

$$\sum_{i=1}^n a_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

En fait, la convergence d'une série se décide à partir de sommes finies. Et, quand on y pense, la somme de cette série, c'est étudier toutes les sommes **finies** possibles. La valeur de $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ est la limite de ces sommes. Comment transformer cette limite lorsque l'on somme sur $\mathbb{Z}$, sur $\mathbb{N}^2$?

Notation.

Si I est un ensemble, on note $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I .

Définition 5 : et prop.

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On définit

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} a_j.$$

1. Si I est finie, $I = \{i_1, \dots, i_N\}$, alors $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k=1}^N a_{i_k}$.
2. Si $I = \mathbb{N}$, alors $\sum_{i \in I} a_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N a_i$.
3. Si l'un des a_i vaut $+\infty$, alors $\sum_{i \in I} a_i = +\infty$.

► **Démonstration.**

1. On remarque que si I est finie, I est une partie finie de I et si J est une partie finie de I , comme

$$\text{les } (a_i) \text{ sont positifs, } \sum_{j \in J} a_j \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

2. On remarque que comme les $\llbracket 0, N \rrbracket$ sont des parties finies de I , alors pour tout N , $\sum_{i=0}^N a_i \leq$

$$\sum_{i \in I} a_i, \text{ donc la limite est toujours inférieure. Réciproquement, si } J \text{ est une partie finie de } I, J$$

$$\text{est une partie finie de } \mathbb{N}, \text{ donc majorée par un certain } N, \text{ donc } \sum_{j \in J} a_j \leq \sum_{i=0}^N a_i \leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N a_i,$$

$$\text{d'où } \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \sum_{j \in J} a_j \text{ est inférieur à la limite désirée.}$$

3. Évident

QED ◀

On a déjà, pour peu de frais, les propriétés suivantes :

Propriété 10.

Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs.

1. Pour tous λ et μ réels positifs,

$$\sum_{i \in I} \lambda a_i + \mu b_i = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i.$$

2. Si $J \subset I$, $\sum_{j \in J} a_j \leq \sum_{i \in I} a_i$.

3. Si pour tout i dans I , $a_i \leq b_i$, alors $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$.

Une des choses **FONDAMENTALES** des sommes de familles de termes positifs, c'est la **sommation par paquets**.

Théorème 11 (Sommation par paquets).

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Soit $(E_j)_{j \in J}$ un recouvrement disjoint de I . Alors

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in E_j} a_i \right).$$

Exemple 4.1.

1. Identifier les paquets dans les écritures

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}.$$

2. Identifions des partitions importantes de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{N}^2$.

Propriété 12 (Conséquences du théorème de sommation par paquets).

Les conséquences de ce théorème sont au moins aussi importantes que le théorème en lui-

même.

1. (invariance par permutation) Si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs, alors pour toute bijection σ de I dans I ,

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}.$$

2. (Théorème de Fubini positif) Si $(c_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est une famille de réels positifs indexée sur un produit, alors

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} c_{ij}.$$

3. (produit) Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ deux familles de réels positifs, indexées sur I et sur J . Alors

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right).$$

Exo 4.5

1. Calculer la valeur de $\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq n} \frac{1}{k!}$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} e^{-an-bm}$.
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ (souvenirs du chapitre 2...)
4. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$.
5. On rappelle $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ et $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2}, \quad \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}, \quad \sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}.$$

6. Calculer $\sum_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{np(n+p-1)}$. On doit faire très attention à ne manipuler que des termes

positifs.

4.2 Familles quelconques

Ici, le but est de généraliser ce que l'on a vu pour les familles à termes positifs. Nous avons déjà fait cela pour les séries, avec la notion de convergence absolue !

Définition 6.

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

Il faut vraiment comprendre que cela correspond à la convergence absolue !

Propriété 13 (et def).

1. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée sur I . Alors cette famille est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} x_i^+$ et $\sum_{i \in I} x_i^-$ sont finies. On note alors

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-.$$

2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes indexée sur I . Alors cette famille est sommable si et seulement si $(\Re(x_i))_{i \in I}$ et $(\Im(x_i))_{i \in I}$ sont sommables. On note alors

$$\sum_{k \in I} x_k = \sum_{k \in I} \Re(x_k) + i \sum_{k \in I} \Im(x_k).$$

On déduit de cette notion de sommabilité plusieurs propositions (certaines vraiment importantes, d'autres, plus accessoires).

Propriété 14.

Soient $(x_i)_{i \in I}$, $(y_i)_{i \in I}$, $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$, $(a_i)_{i \in I}$, $(b_j)_{j \in J}$ des familles de nombres complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.

1. Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable : $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|$.
2. Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables, la famille $(x_i + \lambda y_i)_{i \in I}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) = \lambda \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
3. Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont sommables et si $x_i \leq y_i$ pour tout $i \in I$: $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} y_i$.
4. (Théorème de sommation par paquets) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour tout recouvrement disjoint $(I_k)_{k \in K}$ de I , la famille $\left(\sum_{i \in I_k} x_i \right)_{k \in K}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{k \in K} \sum_{i \in I_k} x_i$.
5. (invariance par permutation) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute bijection φ de J sur I , la famille $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ l'est aussi et : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}$.
6. (théorème de Fubini) Si $(u_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable, les familles $\left(\sum_{j \in J} u_{ij} \right)_{i \in I}$ et $\left(\sum_{i \in I} u_{ij} \right)_{j \in J}$ le sont aussi et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{ij}.$$

7. Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in J}$ sont sommables, la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$ l'est aussi et :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \sum_{i \in I} a_i \times \sum_{j \in J} b_j.$$

8. (théorème d'approximation par des familles finies) Si $(x_i)_{i \in I}$ est sommable :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \forall K \in \mathcal{P}(I), J \subset K \Rightarrow \left| \sum_{i \in I} x_i - \sum_{j \in J} x_j \right| < \varepsilon.$$

On ne va pas faire ces preuves, seulement en donner des idées : on repasse toujours par les par-

ties réelle/imaginaire et donc par les parties positive/négative. Autre idée : on démontre d'abord le théorème d'approximation par des sommes finies, et on l'utilise pour démontrer les propriétés !

Exemple 4.2.

1. Sommabilité de la famille $(z^{ij})_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$?

2. Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$.

Propriété 15 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes).

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les termes généraux de deux séries absolument convergentes. Définissons, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Alors $\sum c_n$ converge et

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \right).$$

► **Démonstration.**

Par convergence absolue des séries de termes généraux (a_n) et (b_n) , on peut dire que la famille $(a_m b_n)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Ainsi, si l'on note

$$E_n = \{(k, n-k), k \in \llbracket 0, n \rrbracket\},$$

on a $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, donc, par théorème de sommation par paquets,

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(k,\ell) \in E_n} a_k b_\ell.$$

Mais

$$\sum_{(k,\ell) \in E_n} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = c_n,$$

d'où le résultat désiré.

QED ◀

Exemple 4.3.

Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Propriété 16.

L'exponentielle complexe est un morphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

► Démonstration.

Soient z et z' dans $\mathbb{C}^2$. Alors

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(z')^\ell}{\ell!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{(z')^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ e^z e^{z'} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k (z')^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z + z')^n = e^{z+z'}. \end{aligned}$$

QED ◀

DEBUT ↗