

DM18 pour mercredi 11/06

On pourra admettre la partie Partie I-A.. La question vi. est indépendante de tout le sujet. La partie Partie I-D. est facultative.

Problème I. Intégration sur un segment

On désigne par \mathbb{K} l'un des deux corps \mathbb{R} et \mathbb{C} . On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. On désigne par

- ▷ $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans \mathbb{K} ;
- ▷ $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ le sous-espace de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ constitué des fonctions en escalier (constantes par morceaux) de $[a, b]$ dans \mathbb{K} ;
- ▷ $\Sigma(a, b)$ l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$: parties finies comprenant a et b .

L'objectif de ce problème est de démontrer la propriété suivante.

Propriété 1. Il existe exactement un opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$(a) \quad \forall f_0 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ \mathcal{S}(f_0 + \lambda f) = \mathcal{S}(f_0) + \lambda \mathcal{S}(f).$$

$$(b) \quad \forall c \in [a, b], \forall d \in [a, b], \quad c \leq d \implies \mathcal{S}(\mathbb{1}_{[c, d]}) = d - c.$$

$$(c) \quad \forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \quad |\mathcal{S}(f)| \leq (\sup |f|)(b - a).$$

La condition (a) traduit la linéarité, bien sûr !

Partie I-A. Préliminaires

- i. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$, $|e| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$.
- ii. En déduire que pour tous $e_1, e_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, $\min(e_1, e_2), \max(e_1, e_2) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.
- iii. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Montrer que pour toute constante $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un élément $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tel que $e \leq f \leq e + \varepsilon$.

Définition 1. On dit qu'une suite de fonctions en escalier $(e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ converge uniformément vers une fonction continue par morceaux f si, et seulement si, on peut trouver au moins une suite de réels positifs (r_n) qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - e_n(x)| \leq r_n.$$

- iv. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, il existe au moins une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f .

Considérons à présent les expressions d'un réel comme différence de deux réels positifs.

Définition 2. Pour tout point y de la droite réelle, on définit la partie positive et la partie négative de y par

$$y^+ \stackrel{\text{def.}}{=} \max(+y, 0) \quad \text{ET} \quad y^- \stackrel{\text{def.}}{=} \max(-y, 0);$$

en remarquant que $y^- = -\min(y, 0)$ car le passage à l'opposé inverse l'ordre des réels.

On fixe un point y de la droite réelle.

- v. Montrer que $y = y^+ - y^-$ et $|y| = y^+ + y^-$.
- vi. Montrer que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, si, et seulement si, $y = \alpha - \beta$ alors il existe exactement un réel positif δ tel que $(\alpha, \beta) = (y^+ + \delta, y^- + \delta)$.

Partie I-B. Unicité (au plus un)

I-B-1. Unicité simple : comparaison entre deux

Soit $S_0, S_1 : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. Supposons que les deux opérateurs S_0 et S_1 satisfont aux conditions (a), (b) et (c).

Soit l'application $\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} S_1 - S_0$.

1. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, $\Delta(e) = 0$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

2. Déterminer une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, $|\Delta(f)| \leq (\sup |f - e|) C$.
3. En déduire que Δ est la forme linéaire nulle. Conclure.

I-B-2. Analyse : comparaison à une troisième et plus encore

Soit $S : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. Supposons que l'opérateur S satisfait aux conditions (a), (b) et (c).

4. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, on a nécessairement

$$S(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(e_n) = \lim \left(S(e_0), S(e_1), S(e_2), \dots \right).$$

où $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions escalier qui converge uniformément vers f , arbitrairement choisie.

5. Montrer que pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, on a nécessairement

$$S(e) = \sum_{k=1}^n v_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e(m_k) (x_k - x_{k-1});$$

où $\sigma = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$ est une subdivision adaptée à e , avec $n \in \mathbb{N}$ tel que $n = |\sigma| - 1$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1}, x_k[$, et m_k est une moyenne stricte de x_{k-1} et x_k : $v_k = e(m_k)$; le tout étant arbitrairement choisi.

6. Retrouver l'unicité.

Partie I-C. Existence (au moins un)

I-C-1. Définition pour les fonctions en escalier (constantes par morceaux)

Définition 3. Pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et toute subdivision $\sigma = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e , où $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_\sigma(e) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^n v_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e(m_k) (x_k - x_{k-1});$$

où, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1}, x_k[$, et m_k est une moyenne stricte de x_{k-1} et x_k , arbitrairement choisie : $v_k = e(m_k)$.

On fixe $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et une subdivision $\sigma = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e .

7. Soit $c \in [a, b] \setminus \sigma$. On pose $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Montrer que σ' est une subdivision adaptée à e et que $S_{\sigma'}(e) = S_\sigma(e)$.

On admet que pour toute subdivision σ' plus fine que σ , σ' est une subdivision adaptée à e et que $S_{\sigma'}(e) = S_\sigma(e)$. Indication : On peut le démontrer directement en nommant judicieusement les points ou par récurrence sur le nombre de points supplémentaires $|\sigma' \setminus \sigma|$.

8. En déduire que pour toute subdivision σ' adaptée à e , $S_{\sigma'}(e) = S_\sigma(e)$.

Définition 4. Ainsi, pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, on pose

$$S(e) \stackrel{\text{def.}}{=} S_\sigma(e)$$

où σ est une subdivision adaptée à e , arbitrairement choisie.

9. Montrer que l'opérateur $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $e \mapsto S(e)$ vérifie

(a') $\forall e_0 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K},$
 $S(e_0 + \lambda e) = S(e_0) + \lambda S(e).$

(b') $\forall c \in [a, b], \forall d \in [a, b], c \leq d \implies \mathcal{S}(\mathbb{1}_{[c,d]}) = d - c.$

(c') $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \mathcal{S}(e) \leq (\sup |e|)(b - a).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}.$

10. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}), e([a, b]) \subset \mathbb{R} \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}.$

11. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}), \mathcal{S}(e) = \mathcal{S}(\text{Re}(e)) + i\mathcal{S}(\text{Im}(e)).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}.$

12. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), e([a, b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}_+.$

13. Montrer que $\forall e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), e_- \leq e_+ \implies \mathcal{S}(e_-) \leq \mathcal{S}(e_+).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}.$

14. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}), |\mathcal{S}(e)| \leq \mathcal{S}(|e|).$

I-C-2. Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 1

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur \mathcal{S} aux fonctions continues par morceaux en manipulant des suites numériques « presque stationnaires ».

On fixe $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}).$ Soit une suite de fonctions en escalier $E = (e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ qui converge uniformément vers $f.$

15. Montrer qu'il existe au moins une suite de réels positifs (ρ_n) qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |\mathcal{S}(e_{n+p}) - \mathcal{S}(e_n)| \leq \rho_n.$

16. En déduire que la suite numérique $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{S}(e_n) \in \mathbb{K}$ est bornée.

17. En déduire qu'il existe au moins un nombre $\ell \in \mathbb{K}$ et au moins une extractrice $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{S}(e_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell.$

18. En déduire que la suite numérique $n \mapsto \mathcal{S}(e_n)$ est convergente.

On pose

$$\mathcal{S}_E(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(e_n) = \lim \left(\mathcal{S}(e_0), \mathcal{S}(e_1), \mathcal{S}(e_2), \dots \right).$$

En rappelant que $E = (e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ converge uniformément vers $f.$

19. Soit une suite de fonctions en escalier $E' = (e'_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ qui converge uniformément vers $f.$ Montrer que $\mathcal{S}_{E'}(f) = \mathcal{S}_E(f).$

Définition 5. Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}),$ on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(e_n);$$

où $(e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $f,$ arbitrairement choisie.

20. Vérifier que $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \implies \tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f).$

Dorénavant, on note \mathcal{S} au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}.$

21. Montrer que l'opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto \mathcal{S}(f)$ ainsi défini satisfait aux conditions (a), (b) et (c).

I-C-3. Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 2

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur \mathcal{S} aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans la demi-droite des réels positifs en manipulant des bornes supérieures, puis aux fonctions à valeurs dans la droite réelle en manipulant des différences de réels positifs, puis aux fonctions à valeurs dans le plan complexe en manipulant des coordonnées.

Cas des fonctions réelles positives

On désigne par $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ à valeurs positives. On agit de même pour $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+).$

Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+),$ on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \mathcal{S}(e) : e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+), e \leq f \right\};$$

22. Vérifier que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+),$ le réel $\tilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini, qu'il est positif et que si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+),$ alors $\tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f).$

Dorénavant, on note \mathcal{S} au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}.$

23. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$, pour tous $e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$, si $e_- \leq f \leq e_+$ alors $\mathcal{S}(e_-) \leq \mathcal{S}(f) \leq \mathcal{S}(e_+)$.

24. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$.

25. Montrer que pour toute erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2) - \varepsilon \leq \mathcal{S}(f_1 + f_2) \leq \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2) + \varepsilon$.

26. En déduire que $\mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

Extension aux fonctions réelles quelconques

Définition 6. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(f^+) - \mathcal{S}(f^-);$$

où $f^+ : x \mapsto f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^- : x \mapsto f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ sont les fonctions partie positive et partie négative de f .

27. Vérifier que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, le réel $\tilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini et que si $f([a, b]) \subset \mathbb{R}_+$ alors $\tilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}_+$ et $\tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$.

Dorénavant, on note \mathcal{S} au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}$.

28. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Soit $p, q \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Montrer que si $f = p - q$ alors $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(p) - \mathcal{S}(q)$.

29. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

30. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

31. Soit $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leq (\sup |f|)(b - a)$.

Extension aux fonctions complexes

Définition 7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(\text{Re}(f)) + i\mathcal{S}(\text{Im}(f));$$

où $\text{Re}(f) : x \mapsto \text{Re}(f)(x) = \text{Re}(f(x))$ et $\text{Im}(f) : x \mapsto \text{Im}(f)(x) = \text{Im}(f(x))$ sont les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f .

32. Vérifier que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, le complexe $\tilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini et que si $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ alors $\tilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}$ et $\tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$.

Dorénavant, on note \mathcal{S} au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}$.

33. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$,

$$\text{Re}(\mathcal{S}(f)) = \mathcal{S}(\text{Re}(f)) \quad \text{ET} \quad \text{Im}(\mathcal{S}(f)) = \mathcal{S}(\text{Im}(f));$$

34. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

35. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, $\mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

36. Soit $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leq (\sup |f|)(b - a)$.

Indication : on pourra considérer une écriture exponentielle du complexe $\mathcal{S}(f)$ et utiliser la question 33.

Partie I-D. Propriétés de l'intégrale

Définition 8. Pour tout segment J de la droite réelle non réduit à un point, on appelle intégration sur le segment $[a, b]$ des fonctions continues complexes par morceaux sur \mathbb{C} l'unique application $\int_J : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_J f$, telle que

$$\triangleright \forall f_0 \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{C}), \forall f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ \int_J (f_0 + \lambda f) = \int_J f_0 + \lambda \int_J f.$$

$$\triangleright \forall c \in J, \forall d \in J, \quad c \leq d \implies \int_J \mathbb{1}_{[c, d]} = d - c.$$

$$\triangleright \forall f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}), \quad \left| \int_J f \right| \leq (\sup |f|)(b - a).$$

I-D-1. Relation de Chasles (simple)

On fixe un segment $J \subset [a, b]$ non réduit à un point. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ on définit la fonction $\text{Pr}(f) \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall x \in [a, b], \quad \text{Pr}(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$$

C'est que l'opérateur Pr prolonge toute fonction f de l'espace $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ en une fonction de l'espace $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ par la valeur 0 en dehors du segment J .

37. Vérifier que l'opérateur $\text{Pr} : \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est bien défini et qu'il est linéaire.

38. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$, $\int_{[a,b]} \text{Pr}(f) = \int_J f$.

39. En déduire que pour tout $g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, si g est nulle en dehors du segment J , alors $\int_{[a,b]} g = \int_J g|_J$.

Pour tout segment $J \subset [a, b]$ non réduit à une point, pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, on note $\int_J f$ au lieu de $\int_J f|_J$.

40. En déduire la relation de Chasles (simple) :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall c \in]a, b[, \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$$

I-D-2. Sous-espace réel engendré par les valeurs

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

41. Montrer que $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}), f([a, b]) \subset \mathbb{R} \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$.

42. En déduire que $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}), \int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \text{Re}(f) + i \int_{[a,b]} \text{Im}(f)$.

I-D-3. Positivité et croissance

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

43. Montrer que la positivité de l'intégrale :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), f([a, b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}_+.$$

44. En déduire la croissance de l'intégrale :

$$\forall f_-, f_+ \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), f_- \leq f_+ \implies \int_{[a,b]} f_- \leq \int_{[a,b]} f_+.$$

I-D-4. Inégalité triangulaire intégrale

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Il s'agit à présent de montrer que le module du complexe $\int_{[a,b]} f(x)dx$ est inférieur au réel positif

$$\int_{[a,b]} |f(x)| dx. \text{ C'est l'inégalité triangulaire intégrale.}$$

45. Déduire de l'inégalité triangulaire classique l'inégalité visée à l'aide de l'approximation uniforme par les fonctions en escalier.

On suppose que $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$.

46. Montrer que $\int_{[a,b]} \pm f(x)dx \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx$. Conclure.

47. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

On ne suppose plus que $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$.

48. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\int_{[a,b]} \text{Re}(e^{-i\theta} f(x))dx \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx$. Conclure.

49. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.
