FIN ↘

DM18 pour mercredi 11/06

On pourra admettre la partie Partie I-A.. La question vii. est indépendante de tout le sujet. La partie Partie I-D. est facultative ; elle ne dépend que de la Partie I-A. et la Partie I-B..

Problème I. Intégration sur un segment

On désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. On désigne par

- ▷ $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ *l'espace des fonctions continues par morceaux de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{K}$ *;*
- ▷ $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ *le sous-espace de* $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ *constitué des fonctions en escalier (constantes par morceaux) de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{K}$ *;*
- ▷ $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ *à valeurs positives (et on agit de même pour* $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$*).*
- ▷ $\Sigma(a, b)$ *l'ensemble des subdivisions du segment* $[a, b]$ *: parties finies comprenant* a *et* b*.*

L'objectif de ce problème est de démontrer la propriété suivante.

Propriété 1. *Il existe exactement un opérateur* $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *telle que*

(a) $\forall f_0 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}),\ \forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{S}(f_0 + \lambda f) = \mathcal{S}(f_0) + \lambda \mathcal{S}(f).$$

(b) $\forall c \in [a, b],\ \forall d \in [a, b],\quad c \leqslant d \implies \mathcal{S}(\mathbb{1}_{[c,d]}) = d - c.$

(c) $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}),\quad |\mathcal{S}(f)| \leqslant (\sup |f|)\,(b - a).$

La condition (a) traduit la linéarité, bien sûr !

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Partie I-A. Préliminaires

i. Soit $S : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. On suppose que $\mathcal{S}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, $\operatorname{Re}\big(\mathcal{S}(f)\big) = \mathcal{S}\big(\operatorname{Re}(f)\big)$ ET $\operatorname{Im}\big(\mathcal{S}(f)\big) = \mathcal{S}\big(\operatorname{Im}(f)\big)$. Montrer que pour toute forme $\mathbb{R}$-linéaire du plan complexe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, on a $\varphi\big(\mathcal{S}(f)\big) = \mathcal{S}\big(\varphi(f)\big)$. En déduire un résultat semblable pour tout endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire du plan complexe $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

ii. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$, $|e| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$.

iii. En déduire que pour tous $e_1, e_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\min(e_1,e_2), \max(e_1,e_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

iv. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Montrer que pour toute constante $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un élément $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$ tel que $e \leqslant f \leqslant e + \varepsilon$.

Définition 1. *On dit qu'une suite de fonctions en escalier $(e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ converge uniformément vers une fonction continue par morceaux f si, et seulement si, on peut trouver au moins une suite de réels positifs $(r_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie*

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - e_n(x)| \leqslant r_n \ .$$

quel que soit $n \in [\![0,\infty[\![$.

v. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, il existe au moins une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f.

Traitons des expressions d'un réel comme différence de deux positifs.

Définition 2. *Pour tout point y de la droite réelle, on définit la partie positive et la partie négative de y par*

$$y^+ \overset{def.}{=} \max(+y,0) \quad \textit{ET} \quad y^- \overset{def.}{=} \max(-y,0) \ ;$$

en notant $+y$ pour y.

On fixe un point y de la droite réelle.

vi. Montrer que $y^- = -\min(y,0)$, $y = y^+ - y^-$ et $|y| = y^+ + y^-$.

vii. Montrer que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, si, et seulement si, il existe au moins un réel positif δ tel que $(\alpha,\beta) = (y^+ + \delta, y^- + \delta)$ alors $y = \alpha - \beta$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Partie I-B. Unicité (*au plus un*)

I-B-1. Unicité simple : comparaison entre deux

Soit $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Supposons que les deux opérateurs $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ satisfont aux conditions (a), (b) et (c).

Soit l'application $\Delta \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_0$.

1. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, $\Delta(e) = 0$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

2. Déterminer une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, $|\Delta(f)| \leqslant (\sup|f-e|)\,C$.

3. En déduire que Δ est la forme linéaire nulle. Conclure.

I-B-2. Analyse : comparaison à une potentielle troisième et plus encore

Soit $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Supposons que l'opérateur $\mathcal{S}$ satisfait aux conditions (a), (b) et (c).

4. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, on a nécessairement

$$\mathcal{S}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(e_n) = \lim\Big(\mathcal{S}(e_0)\ ,\ \mathcal{S}(e_1)\ ,\ \mathcal{S}(e_2)\ ,\ \dots\ ,\ \mathcal{S}(e_n)\ ,\ \dots\Big)\ .$$

où $(e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ est une suite de fonctions escalier qui converge uniformément vers f, arbitrairement choisie.

5. Montrer que pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, on a nécessairement

$$\mathcal{S}(e) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e(m_k)(x_k - x_{k-1})\ ;$$

où $\sigma = \{x_0 < \cdots < x_n\} \in \Sigma(a,b)$ est adaptée à e, avec $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = |\sigma| - 1$, et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1}, x_k[$, et $m_k \in]x_{k-1}, x_k[\ :\ v_k = e\,(m_k)$; la subdivision étant arbitrairement choisie.

6. Retrouver l'unicité.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Partie I-C. Existence (*au moins un*)

I-C-1. Définition pour les fonctions en escalier (constantes par morceaux)

Définition 3. *Pour toute fonction en escalier* $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ *et toute subdivision* $\sigma = \{x_0 < \cdots < x_n\} \in \Sigma(a,b)$ *adaptée à* e*, où* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose*

$$\mathcal{S}_\sigma(e) \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{n} v_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} e(m_k)(x_k - x_{k-1})\ ;$$

où, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$*,* v_k *est l'unique valeur de* e *sur* $]x_{k-1},x_k[$*, et* $m_k \in]x_{k-1},x_k[$ *(une moyenne pondérée stricte de* x_{k-1} *et* x_k*) :* $v_k = e(m_k)$*.*

On fixe $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ *et* $\sigma = \{x_0 < \cdots < x_n\} \in \Sigma(a,b)$ *adaptée à* e*.*

7. Soit $c \in [a,b] \setminus \sigma$. On pose $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Montrer que σ' est une subdivision adaptée à e et que $\mathcal{S}_{\sigma'}(e) = \mathcal{S}_\sigma(e)$.

On admet que pour toute subdivision σ' *plus fine que* σ *(i.e.* $\sigma' \supset \sigma$*),* σ' *est une subdivision adaptée à* e *et que* $\mathcal{S}_{\sigma'}(e) = \mathcal{S}_\sigma(e)$*. Indication : On peut le démontrer directement en nommant judicieusement les points ou par récurrence sur le nombre de points supplémentaires* $|\sigma' \setminus \sigma|$*.*

8. En déduire que pour toute $\sigma' \in \Sigma(a,b)$ adaptée à e, $\mathcal{S}_{\sigma'}(e) = \mathcal{S}_\sigma(e)$.

Définition 4. *Ainsi, pour toute fonction en escalier* $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$*, on pose*

$$\mathcal{S}(e) \overset{def.}{=} \mathcal{S}_\sigma(e)$$

où $\sigma \in \Sigma(a,b)$ *est une subdivision adaptée à* e*, arbitrairement choisie.*

9. Montrer que $\mathcal{S} : \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ e \mapsto \mathcal{S}(e)$ respecte les contraintes

(a') $\forall e_0 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$
$\mathcal{S}(e_0 + \lambda e) = \mathcal{S}(e_0) + \lambda \mathcal{S}(e).$

(b') $\forall c \in [a,b],\ \forall d \in [a,b],\quad c \leqslant d \implies \mathcal{S}(\mathbb{1}_{[c,d]}) = d - c.$

(c') $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\quad \mathcal{S}(e) \leqslant (\sup|e|)\,(b-a).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*.*

10. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}),\quad e([a,b]) \subset \mathbb{R} \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}.$

11. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}),\quad \mathcal{S}(e) = \mathcal{S}(\mathrm{Re}(e)) + i\mathcal{S}(\mathrm{Im}(e)).$

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

12. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \quad e([a,b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}_+$.

13. Montrer que $\forall e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}), \quad e_- \leqslant e_+ \implies \mathcal{S}(e_-) \leqslant \mathcal{S}(e_+)$.

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

14. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}), \quad |\mathcal{S}(e)| \leqslant \mathcal{S}(|e|)$.

I-C-2. Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 1

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur $\mathcal{S}$ aux fonctions continues par morceaux en manipulant des suites numériques « presque stationnaires ».

On fixe $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Soit une suite de fonctions en escalier $E = (e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ qui converge uniformément vers f.

15. Montrer qu'il existe au moins une suite de réels positifs (ρ_n) qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathcal{S}(e_{n+p}) - \mathcal{S}(e_n)| \leqslant \rho_n$.

16. En déduire que la suite numérique $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{S}(e_n) \in \mathbb{K}$ est bornée.

17. En déduire qu'il existe au moins un nombre $\ell \in \mathbb{K}$ et au moins une extractrice $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{S}(e_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

18. En déduire que la suite numérique $n \mapsto \mathcal{S}(e_n)$ est convergente.

On pose

$$\mathcal{S}_E(f) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(e_n) = \lim \Big(\mathcal{S}(e_0)\ ,\ \mathcal{S}(e_1)\ ,\ \mathcal{S}(e_2)\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{S}(e_n)\ ,\ \ldots\Big)\ .$$

En rappelant que $E = (e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ converge uniformément vers f.

19. Soit une suite de fonctions en escalier $E' = (e'_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que $\mathcal{S}_{E'}(f) = \mathcal{S}_E(f)$.

Définition 5. *Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(e_n)\ ;$$

où $(e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, arbitrairement choisie.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

On vérifie que $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}), \quad f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) \implies \widetilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. *Dorénavant, on note* $\mathcal{S}$ *au lieu de* $\widetilde{\mathcal{S}}$.

20. Montrer que l'opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto \mathcal{S}(f)$ ainsi défini satisfait aux conditions (a), (b) et (c).

I-C-3. Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 2

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur $\mathcal{S}$ *aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans la demi-droite des réels positifs en manipulant des bornes supérieures, puis aux fonctions à valeurs dans la droite réelle en manipulant des différences de réels positifs, puis aux fonctions à valeurs dans le plan complexe en manipulant des coordonnées.*

Cas des fonctions réelles positives

Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$, *on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{\text{def.}}{=} \sup\left\{\mathcal{S}(e) : \ e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+),\ e \leqslant f\right\} ;$$

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$, *le réel* $\widetilde{\mathcal{S}}(f)$ *est bien défini, qu'il est positif et que si* $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$, *alors* $\widetilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. *Dorénavant, on note* $\mathcal{S}$ *au lieu de* $\widetilde{\mathcal{S}}$.

21. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$, pour tous $e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$, si $e_- \leqslant f \leqslant e_+$ alors $\mathcal{S}(e_-) \leqslant \mathcal{S}(f) \leqslant \mathcal{S}(e_+)$.

22. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\quad \mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$.

23. Montrer que pour toute erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)-\varepsilon \leqslant \mathcal{S}(f_1+f_2) \leqslant \mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)+\varepsilon$.

24. En déduire que $\mathcal{S}(f_1+f_2) = \mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)$.

Extension aux fonctions réelles quelconques

Définition 6. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, *on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{S}(f^+) - \mathcal{S}(f^-) ;$$

où $f^+ : x \mapsto f^+(x) = \max(f(x),0)$ *et* $f^- : x \mapsto f^-(x) = \max(-f(x),0)$ *sont les fonctions partie positive et partie négative de* f.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$*, le réel* $\widetilde{\mathcal{S}}(f)$ *est bien défini et que si* $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+$ *alors* $\widetilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}_+$ *et* $\widetilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$*. Dorénavant, on note* $\mathcal{S}$ *au lieu de* $\widetilde{\mathcal{S}}$*.*

25. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $p, q \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Montrer que si $f = p - q$ alors $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(p) - \mathcal{S}(q)$.

26. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

27. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

28. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leqslant (\sup |f|)\,(b-a)$.

Extension aux fonctions complexes

Définition 7. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$*, on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{\text{def.}}{=} \mathcal{S}(\mathrm{Re}(f)) + i\mathcal{S}(\mathrm{Im}(f))\ ;$$

où $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ *et* $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$ *sont les fonctions partie réelle et partie imaginaire de* f*.*

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$*, le complexe* $\widetilde{\mathcal{S}}(f)$ *est bien défini et que si* $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ *alors* $\widetilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}$ *et* $\widetilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$*. Dorénavant, on note* $\mathcal{S}$ *au lieu de* $\widetilde{\mathcal{S}}$*.*

29. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{S}(\overline{f}) = \overline{\mathcal{S}(f)}$ et $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

30. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, $\quad \mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

31. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leqslant (\sup |f|)\,(b-a)$.
Indication : pour $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$*, on pourra considérer une écriture exponentielle du complexe* $\mathcal{S}(f)$ *et utiliser l'application partie réelle.*

Partie I-D. Propriétés de l'intégrale

Définition 8. *Pour tout segment* J *de la droite réelle non réduit à une point, on appelle intégration sur le segment* $[a,b]$ *des fonctions complexes continues par morceaux sur* $[a,b]$ *l'unique opérateur* $\displaystyle\int_J : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int_J f$*, tel que*

▷ *ET* $\quad \forall f_0 \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{C}),\ \forall f \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
$\displaystyle\int_J (f_0 + \lambda f) = \int_J f_0 + \lambda \int_J f.$

▷ *ET* $\quad \forall c \in J,\ \forall d \in J, \quad c \leqslant d \implies \displaystyle\int_J \mathbb{1}_{[c,d]} = d - c.$

walter.ngambou@ac-versailles.fr

▷ *ET* $\quad \forall f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}), \quad \left| \int_J f \right| \leqslant (\sup |f|)\,(b-a).$

I-D-1. Relation de Chasles (simple)

On fixe un segment $J \subset [a,b]$ *non réduit à un point. Pour toute fonction* $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ *on définit la fonction* $\mathrm{Pr}(f) \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ *définie comme suit :*

$$\forall x \in [a,b], \quad \mathrm{Pr}(f)(x) = \begin{cases} f(x) \textit{ si } x \in J \\ 0 \textit{ si } x \notin J \end{cases}$$

C'est que l'opérateur Pr *prolonge toute fonction* f *de l'espace* $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ *en un fonction de l'espace* $\mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ *par la valeur* 0 *en dehors du segment* J*.*

32. Vérifier que l'opérateur $\mathrm{Pr} : \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}) \to \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ est bien défini et qu'il est linéaire.

33. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \mathrm{Pr}(f) = \int_J f$.

34. En déduire que pour tout $g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$, si g est nulle en dehors du segment J, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} g = \int_J g_{|J}$.

Pour tout segment $J \subset [a,b]$ *non réduit à une point, pour tout* $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$*, on note* $\displaystyle\int_J f$ *au lieu de* $\displaystyle\int_J f_{|J}$*.*

35. En déduire la relation de Chasles (simple) :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K}),\ \forall c \in]a,b[, \quad \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$$

I-D-2. Sous-espace réel engendré par les valeurs

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*.*

36. Montrer que $\quad \forall f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{C}), \quad f([a,b]) \subset \mathbb{R} \implies \displaystyle\int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$.

37. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b]$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) \quad \text{ET} \quad \mathrm{Im}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)\ .$$

I-D-3. Positivité et croissance

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*.*

walter.ngambou@ac-versailles.fr

38. Montrer la positivité de l'intégrale :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}), \quad f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}_+ \,.$$

39. En déduire la croissance de l'intégrale :

$$\forall f_-, f_+ \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}), \quad f_- \leqslant f_+ \implies \int_{[a,b]} f_- \leqslant \int_{[a,b]} f_+ \,.$$

I-D-4. Inégalité triangulaire intégrale

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*. Soit* $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$*. Il s'agit à présent de montrer que le module du complexe* $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ *est inférieur au réel positif* $\int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$*. C'est l'inégalité triangulaire intégrale.*

40. Déduire de l'inégalité triangulaire classique l'inégalité visée à l'aide de l'approximation uniforme par les fonctions en escalier.

On suppose que $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$*.*

41. Montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} \pm f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Conclure.

42. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

On ne suppose plus que $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$*.*

43. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(x)\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Conclure.

44. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

***

DEBUT ↖

walter.ngambou@ac-versailles.fr