DM18 pour mercredi 11/06

On pourra admettre la partie Partie I-A.. La question vii. est indépendante de tout le sujet. La partie Partie I-D. est facultative ; elle ne dépend que de la Partie I-A. et la Partie I-B..

Problème I. Intégration sur un segment

On désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. On désigne par

- $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ *l'espace des fonctions continues par morceaux de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{K}$ *;*
- $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ *le sous-espace de* $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ *constitué des fonctions en escalier (constantes par morceaux) de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{K}$ *;*
- $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$ *l'ensemble des fonctions de* $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ *à valeurs positives (et on agit de même pour* $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$*).*
- $\Sigma(a,b)$ *l'ensemble des subdivisions du segment* $[a,b]$ *: parties finies comprenant* a *et* b*.*

L'objectif de ce problème est de démontrer la propriété suivante.

Propriété 1. *Il existe exactement un opérateur* $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *telle que*

(a) $\forall f_0 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
$\mathcal{S}(f_0 + \lambda f) = \mathcal{S}(f_0) + \lambda \mathcal{S}(f)$.

(b) $\forall c \in [a,b],\ \forall d \in [a,b],\quad c \leqslant d \implies \mathcal{S}(\mathbb{1}_{[c,d]}) = d - c$.

(c) $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}),\quad |\mathcal{S}(f)| \leqslant (\sup|f|)\,(b-a)$.

La condition (a) traduit la linéarité, bien sûr !

Partie I-A. Préliminaires

i. Soit $S : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. On suppose que $\mathcal{S}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, $\operatorname{Re}\big(\mathcal{S}(f)\big) = \mathcal{S}\big(\operatorname{Re}(f)\big)$ ET $\operatorname{Im}\big(\mathcal{S}(f)\big) = \mathcal{S}\big(\operatorname{Im}(f)\big)$. Montrer que pour toute forme $\mathbb{R}$-linéaire du plan complexe $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, on a $\varphi(\mathcal{S}(f)) = \mathcal{S}\big(\varphi(f)\big)$. En déduire un résultat semblable pour tout endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire du plan complexe $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

ii. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C})$, $|e| \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$.

iii. En déduire que pour tous $e_1, e_2 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $\min(e_1,e_2), \max(e_1,e_2) \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

iv. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Montrer que pour toute constante $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un élément $e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$ tel que $e \leqslant f \leqslant e + \varepsilon$.

Définition 1. *On dit qu'une suite de fonctions en escalier* $(e_n)_{n \in [\![0,\infty[\![}$ *converge uniformément vers une fonction continue par morceaux* f *si, et seulement si, on peut trouver au moins une suite de réels positifs* $(r_n)_{n \in [\![0,\infty[\![}$ *qui tend vers* 0 *en décroissant et qui vérifie*

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x) - e_n(x)| \leqslant r_n \ .$$

quel que soit $n \in [\![0,\infty[\![$.

v. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, il existe au moins une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f.

Traitons des expressions d'un réel comme différence de deux positifs.

Définition 2. *Pour tout point* y *de la droite réelle, on définit la partie positive et la partie négative de* y *par*

$$y^+ \overset{\text{def.}}{=} \max(+y, 0) \quad \textit{ET} \quad y^- \overset{\text{def.}}{=} \max(-y, 0) \ ;$$

en notant $+y$ *pour* y*.*

On fixe un point y *de la droite réelle.*

vi. Montrer que $y^- = -\min(y,0)$, $y = y^+ - y^-$ et $|y| = y^+ + y^-$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

vii. Montrer que pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, si, et seulement si, il existe au moins un réel positif δ tel que $(\alpha,\beta)=(y^++\delta,y^-+\delta)$ alors $y=\alpha-\beta$.

Partie I-B. Unicité (*au plus un*)

I-B-1. Unicité simple : comparaison entre deux

Soit $\mathcal{S}_0,\mathcal{S}_1:\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})\to\mathbb{K}$. Supposons que les deux opérateurs $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ satisfont aux conditions (a), (b) et (c).

Soit l'application $\Delta\overset{def.}{=}\mathcal{S}_1-\mathcal{S}_0$.

1. Montrer que pour tout $e\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, $\Delta(e)=0$.

Soit $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$.

2. Déterminer une constante $C\in\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $e\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, $|\Delta(f)|\leqslant(\sup|f-e|)\,C$.

3. En déduire que Δ est la forme linéaire nulle. Conclure.

I-B-2. Analyse : comparaison à une potentielle troisième et plus encore

Soit $\mathcal{S}:\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})\to\mathbb{K}$. Supposons que l'opérateur $\mathcal{S}$ satisfait aux conditions $(a),(b)$ et (c).

4. En déduire que pour toute fonction $f\in\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, on a nécessairement

$$\mathcal{S}(f)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{S}(e_n)=\lim\Big(\mathcal{S}(e_0)\ ,\ \mathcal{S}(e_1)\ ,\ \mathcal{S}(e_2)\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{S}(e_n)\ ,\ \ldots\Big)\ .$$

où $(e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ est une suite de fonctions escalier qui converge uniformément vers f, arbitrairement choisie.

5. Montrer que pour toute fonction en escalier $e\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, on a nécessairement

$$\mathcal{S}(e)=\sum_{k=1}^{n}v_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}e(m_k)(x_k-x_{k-1})\ ;$$

où $\sigma=\{x_0<\cdots<x_n\}\in\Sigma(a,b)$ est adaptée à e, avec $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n=|\sigma|-1$, et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1},x_k[$, et $m_k\in]x_{k-1},x_k[\ :\ v_k=e(m_k)$; la subdivision étant arbitrairement choisie.

6. Retrouver l'unicité.

Partie I-C. Existence (*au moins un*)

I-C-1. Définition pour les fonctions en escalier (constantes par morceaux)

Définition 3. *Pour toute fonction en escalier $e\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et toute subdivision $\sigma=\{x_0<\cdots<x_n\}\in\Sigma(a,b)$ adaptée à e, où $n\in\mathbb{N}^*$, on pose*

$$\mathcal{S}_\sigma(e)\overset{def.}{=}\sum_{k=1}^{n}v_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}e(m_k)(x_k-x_{k-1})\ ;$$

où, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1},x_k[$, et $m_k\in]x_{k-1},x_k[$ (une moyenne pondérée stricte de x_{k-1} et x_k) : $v_k=e(m_k)$.

On fixe $e\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et $\sigma=\{x_0<\cdots<x_n\}\in\Sigma(a,b)$ adaptée à e.

7. Soit $c\in[a,b]\setminus\sigma$. On pose $\sigma'=\sigma\cup\{c\}$. Montrer que σ' est une subdivision adaptée à e et que $\mathcal{S}_{\sigma'}(e)=\mathcal{S}_\sigma(e)$.

On admet que pour toute subdivision σ' plus fine que σ (i.e. $\sigma'\supset\sigma$), σ' est une subdivision adaptée à e et que $\mathcal{S}_{\sigma'}(e)=\mathcal{S}_\sigma(e)$. Indication : On peut le démontrer directement en nommant judicieusement les points ou par récurrence sur le nombre de points supplémentaires $|\sigma'\setminus\sigma|$.

8. En déduire que pour toute $\sigma'\in\Sigma(a,b)$ adaptée à e, $\mathcal{S}_{\sigma'}(e)=\mathcal{S}_\sigma(e)$.

Définition 4. *Ainsi, pour toute fonction en escalier $e\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, on pose*

$$\mathcal{S}(e)\overset{def.}{=}\mathcal{S}_\sigma(e)$$

où $\sigma\in\Sigma(a,b)$ est une subdivision adaptée à e, arbitrairement choisie.

9. Montrer que $\quad\mathcal{S}:\ \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})\to\mathbb{K},\ e\mapsto\mathcal{S}(e)\quad$ respecte les contraintes

walter.ngambou@ac-versailles.fr

(a') $\forall e_0 \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$
$\mathcal{S}(e_0+\lambda e) = \mathcal{S}(e_0) + \lambda \mathcal{S}(e).$

(b') $\forall c \in [a,b],\ \forall d \in [a,b],\quad c \leqslant d \implies \mathcal{S}(\mathbb{1}_{[c,d]}) = d-c.$

(c') $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}),\quad \mathcal{S}(e) \leqslant (\sup|e|)\,(b-a).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

10. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}),\quad e([a,b]) \subset \mathbb{R} \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}.$

11. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}),\quad \mathcal{S}(e) = \mathcal{S}(\mathrm{Re}(e)) + i\mathcal{S}(\mathrm{Im}(e)).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

12. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),\quad e([a,b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}_+.$

13. Montrer que $\forall e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),\quad e_- \leqslant e_+ \implies \mathcal{S}(e_-) \leqslant \mathcal{S}(e_+).$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

14. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{C}),\quad |\mathcal{S}(e)| \leqslant \mathcal{S}(|e|).$

I-C-2. Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 1

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur $\mathcal{S}$ aux fonctions continues par morceaux en manipulant des suites numériques « presque stationnaires ».

On fixe $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Soit une suite de fonctions en escalier $E = (e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ qui converge uniformément vers f.

15. Montrer qu'il existe au moins une suite de réels positifs (ρ_n) qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N},\quad |\mathcal{S}(e_{n+p}) - \mathcal{S}(e_n)| \leqslant \rho_n$.

16. En déduire que la suite numérique $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{S}(e_n) \in \mathbb{K}$ est bornée.

17. En déduire qu'il existe au moins un nombre $\ell \in \mathbb{K}$ et au moins une extractrice $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{S}(e_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

18. En déduire que la suite numérique $n \mapsto \mathcal{S}(e_n)$ est convergente.

On pose

$$\mathcal{S}_E(f) \overset{\textit{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(e_n) = \lim \Big(\mathcal{S}(e_0)\ ,\ \mathcal{S}(e_1)\ ,\ \mathcal{S}(e_2)\ ,\ \ldots\ ,\ \mathcal{S}(e_n)\ ,\ \ldots\Big)\ .$$

En rappelant que $E = (e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ converge uniformément vers f.

19. Soit une suite de fonctions en escalier $E' = (e'_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ qui converge uniformément vers f. Montrer que $\mathcal{S}_{E'}(f) = \mathcal{S}_E(f)$.

Définition 5. *Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$, on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{\textit{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(e_n)\ ;$$

où $(e_n)_{n\in[\![0,\infty[\![}$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f, arbitrairement choisie.

On vérifie que $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}),\quad f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K}) \implies \widetilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

20. Montrer que l'opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ f \mapsto \mathcal{S}(f)$ ainsi défini satisfait aux conditions (a), (b) et (c).

I-C-3. Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 2

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur $\mathcal{S}$ aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans la demi-droite des réels positifs en manipulant des bornes supérieures, puis aux fonctions à valeurs dans la droite réelle en manipulant des différences de réels positifs, puis aux fonctions à valeurs dans le plan complexe en manipulant des coordonnées.

Cas des fonctions réelles positives

Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$, on pose

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{\textit{def.}}{=} \sup\Big\{\mathcal{S}(e) :\ e \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+),\ e \leqslant f\Big\}\ ;$$

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$, le réel $\widetilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini, qu'il est positif et que si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$, alors $\widetilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

21. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$, pour tous $e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}_+)$, si $e_- \leqslant f \leqslant e_+$ alors $\mathcal{S}(e_-) \leqslant \mathcal{S}(f) \leqslant \mathcal{S}(e_+)$.

22. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\quad \mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$.

23. Montrer que pour toute erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)-\varepsilon \leqslant \mathcal{S}(f_1+f_2) \leqslant \mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)+\varepsilon$.

24. En déduire que $\mathcal{S}(f_1+f_2)=\mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)$.

Extension aux fonctions réelles quelconques

Définition 6. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{def.}{=} \mathcal{S}(f^+)-\mathcal{S}(f^-)\ ;$$

où $f^+ : x \mapsto f^+(x) = \max(f(x),0)$ et $f^- : x \mapsto f^-(x) = \max(-f(x),0)$ sont les fonctions partie positive et partie négative de f.

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, le réel $\widetilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini et que si $f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+$ alors $\widetilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}_+$ et $\widetilde{\mathcal{S}}(f)=\mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

25. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. Soit $p,q \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}_+)$. Montrer que si $f = p-q$ alors $\mathcal{S}(f)=\mathcal{S}(p)-\mathcal{S}(q)$.

26. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{S}(\lambda f)=\lambda\mathcal{S}(f)$.

27. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, $\quad \mathcal{S}(f_1+f_2)=\mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)$.

28. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leqslant (\sup|f|)\,(b-a)$.

Extension aux fonctions complexes

Définition 7. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, on pose*

$$\widetilde{\mathcal{S}}(f) \overset{def.}{=} \mathcal{S}(\mathrm{Re}(f))+i\mathcal{S}(\mathrm{Im}(f))\ ;$$

où $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f)(x)=\mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f)(x)=\mathrm{Im}(f(x))$ sont les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f.

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, le complexe $\widetilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini et que si $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$ alors $\widetilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{\mathcal{S}}(f)=\mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{S}}$.

29. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\quad \mathcal{S}(\overline{f})=\overline{\mathcal{S}(f)}$ et $\mathcal{S}(\lambda f)=\lambda\mathcal{S}(f)$.

30. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, $\quad \mathcal{S}(f_1+f_2)=\mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)$.

31. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leqslant (\sup|f|)\,(b-a)$.
Indication : pour $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$, on pourra considérer une écriture exponentielle du complexe $\mathcal{S}(f)$ et utiliser l'application partie réelle.

Partie I-D. Propriétés de l'intégrale

Définition 8. *Pour tout segment J de la droite réelle non réduit à une point, on appelle intégration sur le segment $[a,b]$ des fonctions complexes continues par morceaux sur $[a,b]$ l'unique opérateur $\displaystyle\int_J : \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int_J f$, tel que*

- ▷ *ET* $\quad \forall f_0 \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{C}),\ \forall f \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{C}),\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$
  $\displaystyle\int_J (f_0+\lambda f) = \int_J f_0 + \lambda \int_J f.$
- ▷ *ET* $\quad \forall c \in J,\ \forall d \in J, \quad c \leqslant d \implies \displaystyle\int_J \mathbb{1}_{[c,d]} = d-c.$
- ▷ *ET* $\quad \forall f \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{K}), \quad \left|\displaystyle\int_J f\right| \leqslant (\sup|f|)\,(b-a).$

I-D-1. Relation de Chasles (simple)

On fixe un segment $J \subset [a,b]$ non réduit à un point. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{K})$ on définit la fonction $\mathrm{Pr}(f) \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall x \in [a,b], \quad \mathrm{Pr}(f)(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in J \\ 0 \text{ si } x \notin J \end{cases}$$

C'est que l'opérateur Pr prolonge toute fonction f de l'espace $f \in \mathcal{CM}(J,\mathbb{K})$ en un fonction de l'espace $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$ par la valeur 0 en dehors du segment J.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

32. Vérifier que l'opérateur $\mathrm{Pr} : \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}) \to \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$ est bien défini et qu'il est linéaire.

33. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \mathrm{Pr}(f) = \int_J f$.

34. En déduire que pour tout $g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$, si g est nulle en dehors du segment J, alors $\displaystyle\int_{[a,b]} g = \int_J g_{|J}$.

Pour tout segment $J \subset [a,b]$ non réduit à une point, pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$, on note $\displaystyle\int_J f$ au lieu de $\displaystyle\int_J f_{|J}$.

35. En déduire la relation de Chasles (simple) :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K}),\ \forall c \in]a,b[, \quad \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$$

I-D-2. Sous-espace réel engendré par les valeurs

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

36. Montrer que $\displaystyle \forall f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{C}), \quad f([a,b]) \subset \mathbb{R} \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$.

37. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a,b]$,

$$\mathrm{Re}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathrm{Re}(f) \quad \text{ET} \quad \mathrm{Im}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathrm{Im}(f)\ .$$

I-D-3. Positivité et croissance

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

38. Montrer la positivité de l'intégrale :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R}), \quad f([a,b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}_+\ .$$

39. En déduire la croissance de l'intégrale :

$$\forall f_-, f_+ \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{R}), \quad f_- \leqslant f_+ \implies \int_{[a,b]} f_- \leqslant \int_{[a,b]} f_+\ .$$

I-D-4. Inégalité triangulaire intégrale

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{C})$. Il s'agit à présent de montrer que le module du complexe $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ est inférieur au réel positif $\displaystyle\int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. C'est l'inégalité triangulaire intégrale.

40. Déduire de l'inégalité triangulaire classique l'inégalité visée à l'aide de l'approximation uniforme par les fonctions en escalier.

On suppose que $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$.

41. Montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} \pm f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Conclure.

42. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

On ne suppose plus que $f([a,b]) \subset \mathbb{R}$.

43. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(x)\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_{[a,b]} |f(x)|\,\mathrm{d}x$. Conclure.

44. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

***

walter.ngambou@ac-versailles.fr