

FIN ↘

2024–2025 / Lycée Pasteur / MSPI 1

Mathématiques

DM18 pour mercredi 11/06

(avec corrigé)

Table des matières

I	Intégration sur un segment	2
I-A	Preliminaires	2
I-B	Unicité (<i>au plus un</i>)	4
I-B-1	Unicité simple : comparaison entre deux	4
I-B-2	Analyse : comparaison à une potentielle troisième et plus encore . . .	5
I-C	Existence (<i>au moins un</i>)	6
I-C-1	Définition pour les fonctions en escalier (constantes par morceaux) . .	6
I-C-2	Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 1	9
I-C-3	Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 2	13
I-D	Propriétés de l'intégrale	18
I-D-1	Relation de Chasles (simple)	18
I-D-2	Sous-espace réel engendré par les valeurs	19
I-D-3	Positivité et croissance	20
I-D-4	Inégalité triangulaire intégrale	21

On pourra admettre la partie I-A. La question vii. est indépendante de tout le sujet. La partie I-D est facultative ; elle ne dépend que de la I-A et la I-B.

I Intégration sur un segment

On désigne par $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. On fixe deux réels a et b tels que $a < b$.

On désigne par

- ▷ $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$;
- ▷ $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ le sous-espace de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ constitué des fonctions en escalier (constantes par morceaux) de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$;
- ▷ $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ à valeurs positives (et on agit de même pour $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$).
- ▷ $\Sigma(a, b)$ l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$: parties finies comprenant a et b .

L'objectif de ce problème est de démontrer la propriété suivante.

Propriété 1. Il existe exactement un opérateur $S : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

(a) $\forall f_0 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$S(f_0 + \lambda f) = S(f_0) + \lambda S(f).$$

(b) $\forall c \in [a, b], \forall d \in [a, b], c \leq d \implies S(\mathbb{1}_{[c, d]}) = d - c.$

(c) $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), |S(f)| \leq (\sup |f|)(b - a).$

La condition (a) traduit la linéarité, bien sûr !

I-A Préliminaires

i. Soit $S : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que S est $\mathbb{R}$ -linéaire et que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, $\operatorname{Re}(S(f)) = S(\operatorname{Re}(f))$ ET $\operatorname{Im}(S(f)) = S(\operatorname{Im}(f))$. Montrer que pour toute forme $\mathbb{R}$ -linéaire du plan complexe $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\varphi(S(f)) = S(\varphi(f))$. En déduire un résultat semblable pour tout endomorphisme $\mathbb{R}$ -linéaire du plan complexe $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Si $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, alors $\varphi(\cdot) = \alpha \operatorname{Re}(\cdot) + \beta \operatorname{Im}(\cdot)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) = (\varphi(1), \varphi(i))$.

Si $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$ -linéaire, alors $L = \varphi_1 + i\varphi_2$, où $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{R})^2$ est un couple de forme $\mathbb{R}$ -linéaires et $(\varphi_1, \varphi_2) = (\operatorname{Re}(L(\cdot)), \operatorname{Im}(L(\cdot)))$.

ii. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$, $|e| \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$.

Si $e \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{C})$ est constante égale à $v \in \mathbb{C}$ sur un intervalle inclus dans $[a, b]$ alors $|e| \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}_+)$ est aussi constante égale à $|v| \in \mathbb{R}_+$ sur ce même intervalle.

iii. En déduire que pour tous $e_1, e_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, $\min(e_1, e_2), \max(e_1, e_2) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$.

Pour tous réels u, v on a

$$\min(u, v) + \max(u, v) = u + v \quad \text{ET} \quad -\min(u, v) + \max(u, v) = |u + v|.$$

Et $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace du $\mathbb{R}$ -e.v. $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.

iv. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Montrer que pour toute constante $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins un élément $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tel que $e \leq f \leq e + \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. D'après [le théorème d'approximation uniforme](#) des éléments de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ par les éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, on choisit $e_0 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tel que $e_0 - \varepsilon/2 \leq f \leq e_0 + \varepsilon/2$. Alors $e : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \max(e_0(x) - \varepsilon/2, 0)$ convient.

Définition 1. On dit qu'une suite de fonctions en escalier $(e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ converge uniformément vers une fonction continue par morceaux f si, et seulement si, on peut trouver au moins une suite de réels positifs $(r_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - e_n(x)| \leq r_n.$$

quel que soit $n \in \llbracket 0, \infty \llbracket$.

v. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, il existe au moins une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f .

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $2^{-n} \in]0, \infty[$, on choisit $e_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ qui vérifie $\forall x \in [a, b], |f(x) - e_n(x)| \leq 2^{-n}$.

Traisons des expressions d'un réel comme différence de deux positifs.

Définition 2. Pour tout point y de la droite réelle, on définit la partie positive et la partie négative de y par

$$y^+ \stackrel{\text{def.}}{=} \max(+y, 0) \quad \text{ET} \quad y^- \stackrel{\text{def.}}{=} \max(-y, 0) ;$$

en notant $+y$ pour y .

On fixe un point y de la droite réelle.

vi. Montrer que $y^- = -\min(y, 0)$, $y = y^+ - y^-$ et $|y| = y^+ + y^-$.

Le passage à l'opposé inverse l'ordre des réels, et 0 est son propre opposé; donc $y^- = -\min(y, 0)$. Puis, c'est comme plus haut (voir iii.).

vii. Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, si, et seulement si, il existe au moins un réel positif δ tel que $(\alpha, \beta) = (y^+ + \delta, y^- + \delta)$ alors $y = \alpha - \beta$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Si $y = \alpha - \beta$ alors $\alpha + y^- = y^+ + \beta$; donc $\delta = \beta \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y) + \alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y)$ convient (par disjonction de cas). L'implication réciproque est vraie.

I-B Unicité (au plus un)

I-B-1 Unicité simple : comparaison entre deux

Soit $S_0, S_1 : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. Supposons que les deux opérateurs S_0 et S_1 satisfont aux conditions (a), (b) et (c).

Soit l'application $\Delta \stackrel{\text{def.}}{=} S_1 - S_0$.

1. Montrer que pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, $\Delta(e) = 0$.

Toute fonction numérique en escalier sur $[a, b]$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des indicatrices sur $[a, b]$ des segments inclus dans $[a, b]$, donc l'espace $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ est contenu dans le noyau de Δ .

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

2. Déterminer une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, $|\Delta(f)| \leq (\sup |f - e|) C$.
-

Soit $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. On peut écrire que $\Delta(f) = \Delta(f) - 0 = \Delta(f) - \Delta(e)$, ou écrire que $f = e + (f - e)$. Ensuite, à l'aide de l'inégalité triangulaire, on trouve que $C = 2(b - a)$ convient.

3. En déduire que Δ est la forme linéaire nulle. Conclure.
-

D'après le théorème d'approximation uniforme des éléments de $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ par les éléments de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$, le résultat suit ce qui précède (le réel positif $|\Delta(f)|$ est inférieur à tout réel strictement positif; donc il est nul).

I-B-2 Analyse : comparaison à une potentielle troisième et plus encore

Soit $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$. Supposons que l'opérateur $\mathcal{S}$ satisfait aux conditions (a), (b) et (c).

4. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, on a nécessairement

$$\mathcal{S}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(e_n) = \lim \left(\mathcal{S}(e_0), \mathcal{S}(e_1), \mathcal{S}(e_2), \dots, \mathcal{S}(e_n), \dots \right).$$

où $(e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ est une suite de fonctions escalier qui converge uniformément vers f , arbitrairement choisie.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. D'après les propriétés de $\mathcal{S}$, pour une telle suite $(e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$, on a $|\mathcal{S}(f) - \mathcal{S}(e_n)| \leq r_n(b - a)$ où (r_n) est une suite réelle qui tend vers 0 en décroissant.

5. Montrer que pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, on a nécessairement

$$\mathcal{S}(e) = \sum_{k=1}^n v_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e(m_k) (x_k - x_{k-1}) ;$$

où $\sigma = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$ est adaptée à e , avec $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = |\sigma| - 1$, et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1}, x_k[$, et $m_k \in]x_{k-1}, x_k[: v_k = e(m_k)$; la subdivision étant arbitrairement choisie.

Pour tout $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$, on a $\mathbb{1}_{[c, d]} = \mathbb{1}_{[c, c]} + \mathbb{1}_{]c, d[} + \mathbb{1}_{[d, d]}$; donc $\mathcal{S}(\mathbb{1}_{]c, d[}) = d - c$. Le résultat suit d'après la définition d'une fonction en escalier et les propriétés de $\mathcal{S}$.

6. Retrouver l'unicité.

D'après ce qui précède, on trouve que deux opérateurs comme cherchés coïncideraient sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ d'après la question 5. puis sur $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ tout entier d'après la question 4. .

I-C Existence (au moins un)

I-C-1 Définition pour les fonctions en escalier (constantes par morceaux)

Définition 3. Pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et toute subdivision $\sigma = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e , où $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{S}_\sigma(e) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{k=1}^n v_k (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n e(m_k) (x_k - x_{k-1}) ;$$

où, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, v_k est l'unique valeur de e sur $]x_{k-1}, x_k[$, et $m_k \in]x_{k-1}, x_k[$ (une moyenne pondérée stricte de x_{k-1} et x_k) : $v_k = e(m_k)$.

On fixe $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\sigma = \{x_0 < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e .

7. Soit $c \in [a, b] \setminus \sigma$. On pose $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Montrer que σ' est une subdivision adaptée à e et que $\mathcal{S}_{\sigma'}(e) = \mathcal{S}_\sigma(e)$.

Nommons k l'unique entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_{k-1} < c < x_k$; en sorte que $\sigma' = \{x_0 < \dots < x_{k-1} < c < x_k < \dots < x_n\} \in \Sigma(a, b)$.

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, nommons v_i est l'unique valeur de e sur $]x_{i-1}, x_i[$.

Ainsi, comme e est constante sur $]x_{k-1}, x_k[$, e est constante et sur $]x_{k-1}, c[$ et sur $]c, x_k[$.
Donc σ' est adaptée à e .

De plus, à cause du même argument que ci-avant, e prend sur $]x_{k-1}, c[$ et sur $]c, x_k[$ la même valeur v_k . Or $v_k(x_k - x_{k-1}) = v_k(x_k - c) + v_k(c - x_{k-1})$. D'où $S_{\sigma'}(e) = S_{\sigma}(e)$.

On admet que pour toute subdivision σ' plus fine que σ (i.e. $\sigma' \supset \sigma$), σ' est une subdivision adaptée à e et que $S_{\sigma'}(e) = S_{\sigma}(e)$. Indication : On peut le démontrer directement en nommant judicieusement les points ou par récurrence sur le nombre de points supplémentaires $|\sigma' \setminus \sigma|$.

Directement. Noter $\sigma' = \{y_0 < \dots < y_{n'}\} \in \Sigma(a, b)$. Puis, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, nommer ℓ_k l'unique entier de $\llbracket 0, n' \rrbracket$ tel que $y_{\ell_k} = x_k$; en sorte que si $k \geq 1$ alors e est constante sur $]y_{\ell_{k-1}}, y_{\ell_k}[$, et $0 = \ell_0 < \ell_1 < \dots < \ell_n = n'$. Le résultat suit à l'aide des sommes télescopiques.

8. En déduire que pour toute $\sigma' \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e , $S_{\sigma'}(e) = S_{\sigma}(e)$.

Pour $\sigma' \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e , $\sigma \cup \sigma' \in \Sigma(a, b)$ est à la fois plus fine que σ et σ' : $\sigma, \sigma' \subset \sigma \cup \sigma'$; donc elle est adaptée à e ; donc $S_{\sigma'}(e) = S_{\sigma \cup \sigma'}(e)$ et $S_{\sigma}(e) = S_{\sigma \cup \sigma'}(e)$.

Définition 4. Ainsi, pour toute fonction en escalier $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, on pose

$$S(e) \stackrel{\text{def.}}{=} S_{\sigma}(e)$$

où $\sigma \in \Sigma(a, b)$ est une subdivision adaptée à e , arbitrairement choisie.

9. Montrer que $S : \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $e \mapsto S(e)$ respecte les contraintes

(a') $\forall e_0 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$S(e_0 + \lambda e) = S(e_0) + \lambda S(e).$$

(b') $\forall c \in [a, b], \forall d \in [a, b], c \leq d \implies S(\mathbb{1}_{[c, d]}) = d - c$.

(c') $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}), S(e) \leq (\sup |e|)(b - a)$.

1° Soit $e_0 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$, $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

En formant la réunion de deux subdivisions adaptées à e_0 et à e respectivement, on trouve une

subdivision $\sigma \in \Sigma(a, b)$ adaptée à la fois à e_0 , e et $e_0 + \lambda e$. Alors, par linéarité de la somme (du signe somme Σ), on trouve que

$$\mathcal{S}_\sigma(e_0 + \lambda e) = \mathcal{S}_\sigma(e_0) + \lambda \mathcal{S}_\sigma(e) .$$

2° Soit $c \in [a, b]$ et $d \in [a, b]$ tels que $c \leq d$.

Supposons $c = d$. Alors $\sigma := \{a < c < b\} \in \Sigma(a, b)$ est adaptée à $\mathbb{1}_{[c, d]}$ et

$$\mathcal{S}_\sigma(\mathbb{1}_{[c, d]}) = 0 \cdot (b - c) + 0 \cdot (c - a) = d - c .$$

Autrement, $c < d$. Alors $\sigma := \{a < c < d < b\} \in \Sigma(a, b)$ est adaptée à $\mathbb{1}_{[c, d]}$ et

$$\mathcal{S}_\sigma(\mathbb{1}_{[c, d]}) = 0 \cdot (b - d) + 1 \cdot (d - c) + 0 \cdot (c - a) = d - c .$$

3° Soit $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K})$. Soit $\sigma \in \Sigma(a, b)$ adaptée à e . D'une part, $\sup |e|$ est un réel majorant le module de toute valeur de e . D'autre part, pour tous $c, d \in [a, b]$ tels que $c < d$ on a $d - c \in \mathbb{R}_+$. Donc, à l'aide de l'inégalité triangulaire classique et d'une somme télescopique, on trouve que

$$\mathcal{S}_\sigma(e) \leq (\sup |e|) (b - a) .$$

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

10. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}), \quad e([a, b]) \subset \mathbb{R} \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}$.

Pour $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$, en utilisant une somme relative à une subdivision adaptée et ce que $\mathbb{R}$ est stable par addition et par multiplication, le résultat suit.

11. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}), \quad \mathcal{S}(e) = \mathcal{S}(\operatorname{Re}(e)) + i\mathcal{S}(\operatorname{Im}(e))$.

Pour $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C})$, en utilisant une somme relative à une subdivision adaptée, les écritures algébriques des nombres complexes et ce que les deux opérateurs $\operatorname{Re}()$ et $\operatorname{Im}()$ sont $\mathbb{R}$ -linéaires, le résultat suit.

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

12. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \quad e([a, b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \mathcal{S}(e) \in \mathbb{R}_+.$

Comme à la question 10.

13. Montrer que $\forall e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}), \quad e_- \leq e_+ \implies \mathcal{S}(e_-) \leq \mathcal{S}(e_+).$

Pour $e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ tels que $e_- \leq e_+$, on a $e_+ = e_- + (e_+ - e_-)$, avec $e_+ - e_- \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Donc la linéarité et positivité établies précédemment donnent le résultat.

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

14. Montrer que $\forall e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{C}), \quad |\mathcal{S}(e)| \leq \mathcal{S}(|e|).$

Comme pour établir la proposition (c').

I-C-2 Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 1

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur $\mathcal{S}$ aux fonctions continues par morceaux en manipulant des suites numériques « presque stationnaires ».

On fixe $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. Soit une suite de fonctions en escalier $E = (e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ qui converge uniformément vers f .

15. Montrer qu'il existe au moins une suite de réels positifs (ρ_n) qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad |\mathcal{S}(e_{n+p}) - \mathcal{S}(e_n)| \leq \rho_n.$

Par définition, soit une suite de réels positifs $(r_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ qui tend vers 0 en décroissant et qui vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \quad |f(x) - e_n(x)| \leq r_n.$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \quad |e_{n+p}(x) - e_n(x)| \leq 2r_n.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{S}(e_{n+p}) - \mathcal{S}(e_n) = \mathcal{S}(e_{n+p} - e_n)$. Donc la suite suivante convient :

$$(\rho_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket} = 2(b-a)(r_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}.$$

16. En déduire que la suite numérique $\mathbb{N} \ni n \mapsto \mathcal{S}(e_n) \in \mathbb{K}$ est bornée.

Soit une suite de réels positifs (ρ_n) comme ci-avant. Alors $\mathbb{N} \ni n \mapsto |\mathcal{S}(e_n)| \in \mathbb{R}_+$ est majorée par la constante $|\mathcal{S}(e_0)| + \rho_0$.

17. En déduire qu'il existe au moins un nombre $\ell \in \mathbb{K}$ et au moins une extractrice $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{S}(e_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \ell$.

En vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass portant sur l'extraction de sous-suites convergentes, le résultat suit.

18. En déduire que la suite numérique $n \mapsto \mathcal{S}(e_n)$ est convergente.

Comme au DS05, problème 2, questions 7,8 et 9. Et comme dans les notes de révision du cours d'intégration sur un segment

On pose

$$\mathcal{S}_E(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(e_n) = \lim \left(\mathcal{S}(e_0), \mathcal{S}(e_1), \mathcal{S}(e_2), \dots, \mathcal{S}(e_n), \dots \right).$$

En rappelant que $E = (e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ converge uniformément vers f .

19. Soit une suite de fonctions en escalier $E' = (e'_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ qui converge uniformément vers f . Montrer que $\mathcal{S}_{E'}(f) = \mathcal{S}_E(f)$.

Par définition, soit deux suites de réels positifs $(r_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ et $(r'_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \rrbracket}$ qui tendent vers 0 en décroissant et qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \quad |e'_n(x) - f(x)| \leq r'_n \quad \text{ET} \quad |f(x) - e_n(x)| \leq r_n.$$

[Voie 1] La suite de fonctions en escalier

$$(\tilde{e}_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket} = (e_0, e'_0, e_1, e'_1, e_2, e'_2, \dots)$$

converge uniformément vers f .

En effet, on a $\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - \tilde{e}_{2k}(x)|, |f(x) - \tilde{e}_{1+2k}(x)| \leq r_k + r'_k$, quel que soit l'entier $k \in \mathbb{N}$, et la suite $(r_{\lfloor n/2 \rfloor} + r'_{\lfloor n/2 \rfloor})_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ tend vers 0 en décroissant.

Donc la suite numérique

$$(\mathcal{S}(e_0), \mathcal{S}(e'_0), \mathcal{S}(e_1), \mathcal{S}(e'_1), \mathcal{S}(e_2), \mathcal{S}(e'_2), \dots)$$

converge; puis sa suite extraite de rangs pairs et celle de rangs impairs convergent vers une limite commune.

[Voie 2] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a, b]$, on a $|e'_n(x) - e_n(x)| \leq r_n + r'_n$, avec $r_n + r'_n$ indépendant de x , donc

$$(\sup |e'_n - e_n|) \leq r_n + r'_n.$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{S}(e'_n) - \mathcal{S}(e_n) = \mathcal{S}(e'_n - e_n)$; donc

$$|\mathcal{S}(e'_n) - \mathcal{S}(e_n)| \leq (r_n + r'_n)(b - a);$$

donc, par passage à la limite dans les inégalités larges, on trouve que

$$|\mathcal{S}_{E'}(f) - \mathcal{S}_E(f)| \leq 0.$$

Le résultat suit.

Définition 5. Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}(e_n);$$

où $(e_n)_{n \in \llbracket 0, \infty \llbracket}$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f , arbitrairement choisie.

On vérifie que $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \quad f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{K}) \implies \tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}$.

20. Montrer que l'opérateur $\mathcal{S} : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, f \mapsto \mathcal{S}(f)$ ainsi défini satisfait aux

conditions (a), (b) et (c).

1° Soit $f_0 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit deux suites $(\hat{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier.

▷ À l'aide de l'inégalité triangulaire, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [a, b]$

$$|(f_0 + \lambda f)(x) - (\hat{e}_n + \lambda e_n)(x)| \leq \sup |f_0 - \hat{e}_n| + |\lambda| \sup |f - e_n|$$

avec le majorant indépendant de x .

▷ Donc si $(\hat{e}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniformément vers f_0 et f respectivement, alors $(\hat{e}_n + \lambda e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers $f_0 + \lambda f$.

▷ D'où la linéarité de $\mathcal{S}$ (condition (a)) d'après la linéarité de la limite sur l'espace des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergentes.

2° La condition (b) est la condition (b').

3° Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$.

Soit une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier et une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs qui tend vers 0 en décroissant telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], |f(x) - e_n(x)| \leq r_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.

▷ D'une part,

$$|\mathcal{S}(e_n)| \leq (\sup |e_n|) (b - a).$$

▷ D'autre part, pour tout $x \in [a, b]$, $|e_n(x)| \leq r_n + |f(x)| \leq r_n + \sup |f|$, avec $r_n + \sup |f|$

indépendant de x ; donc

$$\sup |e_n| \leq r_n + \sup |f|.$$

▷ Donc

$$|\mathcal{S}(e_n)| \leq (\sup |f|) (b - a) + r_n (b - a).$$

Puis, en faisant tendre n vers ∞ , par passage à la limite dans les inégalités larges, on trouve que

$$|\mathcal{S}(f)| \leq (\sup |f|) (b - a) .$$

D'où la condition (c).

I-C-3 Prolongement aux fonctions continues par morceaux : 2

Ici on vise à prolonger la définition de l'opérateur $\mathcal{S}$ aux fonctions continues par morceaux à valeurs dans la demi-droite des réels positifs en manipulant des bornes supérieures, puis aux fonctions à valeurs dans la droite réelle en manipulant des différences de réels positifs, puis aux fonctions à valeurs dans le plan complexe en manipulant des coordonnées.

Cas des fonctions réelles positives

Pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$, on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \sup \left\{ \mathcal{S}(e) : e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+), e \leq f \right\} ;$$

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$, le réel $\tilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini, qu'il est positif et que si $f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$, alors $\tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$. La partie de la droite réelle $\left\{ \mathcal{S}(e) : e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+), e \leq f \right\}$ est non vide et majorée.

En effet. Soit $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$.

Si $e = 0$ alors $e \leq f$.

Si $e \leq f$ alors $e \leq \sup f$, puis $\sup e \leq \sup f$; donc, d'après la condition (c'), $\mathcal{S}(e) \leq (\sup f)(b - a)$, avec $(\sup f)(b - a)$ indépendant du choix de e .

21. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$, pour tous $e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$, si $e_- \leq f \leq e_+$ alors $\mathcal{S}(e_-) \leq \mathcal{S}(f) \leq \mathcal{S}(e_+)$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$; soit $e_-, e_+ \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tels que $e_- \leq f \leq e_+$ (p.ex. $e_- = 0$ et $e_+ = \sup f$).

Premièrement, d'après la définition de $\mathcal{S}(f)$, $\mathcal{S}(e_-) \leq \mathcal{S}(f)$.

Deuxièmement, pour tout $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tel que $e \leq f$, on a $e \leq e_+$, puis, d'après la question 13, $\mathcal{S}(e) \leq \mathcal{S}(e_+)$; avec $\mathcal{S}(e_+)$ indépendant du choix de e . D'où $\mathcal{S}(f) \leq \mathcal{S}(e_+)$.

22. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Supposons $\lambda \neq 0$. Soit $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tel que $e \leq f$.

Alors $\lambda e \leq \lambda f$ car $\lambda \geq 0$, avec $\lambda e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Donc $\mathcal{S}(\lambda e) \leq \mathcal{S}(\lambda f)$. Or $\lambda \mathcal{S}(e) = \mathcal{S}(\lambda e)$ et $\lambda > 0$; donc $\mathcal{S}(e) \leq \lambda^{-1} \mathcal{S}(\lambda f)$, avec $\lambda^{-1} \mathcal{S}(\lambda f)$ indépendant de e . Donc $\mathcal{S}(f) \leq \lambda^{-1} \mathcal{S}(\lambda f)$.

Donc

$$\lambda \mathcal{S}(f) \leq \mathcal{S}(\lambda f) .$$

Or $\lambda f \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$. Donc en substituant au couple (f, λ) le couple $(\lambda f, \lambda^{-1})$, on trouve que $\lambda^{-1} \mathcal{S}(\lambda f) \leq \mathcal{S}(\lambda^{-1} \lambda f)$. Donc

$$\mathcal{S}(\lambda f) \leq \lambda \mathcal{S}(f) .$$

D'où

$$\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f) .$$

Si $\lambda = 0$, alors la relation tient encore .

Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$.

23. Montrer que pour toute erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2) - \varepsilon \leq \mathcal{S}(f_1 + f_2) \leq \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2) + \varepsilon$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ (arbitrairement petit). D'après la question iv., soit $e_1, e_2 \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tels que $e_1 \leq f_1 \leq e_1 + \varepsilon$ et $e_2 \leq f_2 \leq e_2 + \varepsilon$. Alors $e_1 + e_2 \leq f_1 + f_2 \leq e_1 + e_2 + 2\varepsilon$. Puis, d'après

la question 21. et la condition (a'),

$$\begin{cases} \mathcal{S}(e_1) \leq \mathcal{S}(f_1) \leq \mathcal{S}(e_1) + \varepsilon(b-a); \\ \mathcal{S}(e_2) \leq \mathcal{S}(f_2) \leq \mathcal{S}(e_2) + \varepsilon(b-a); \\ \mathcal{S}(e_1) + \mathcal{S}(e_2) \leq \mathcal{S}(f_1 + f_2) \leq \mathcal{S}(e_1) + \mathcal{S}(e_2) + 2\varepsilon(b-a). \end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2) - 2\varepsilon(b-a) \leq \mathcal{S}(f_1 + f_2) \leq \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2) + 2\varepsilon(b-a)$$

Comme $\varepsilon/(2(b-a)) \in \mathbb{R}_+^*$, avec $2(b-a)$ indépendant de ε , on peut substituer à ε le réel $\varepsilon' := \varepsilon/(2(b-a))$ dans l'encadrement ci-avant et obtenir le résultat.

24. En déduire que $\mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

Ainsi, le réel positif $|\mathcal{S}(f_1 + f_2) - \mathcal{S}(f_1) - \mathcal{S}(f_2)|$ est inférieur à tout réel strictement positif, donc il est égal à 0.

Extension aux fonctions réelles quelconques

Définition 6. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, on pose

$$\tilde{\mathcal{S}}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} \mathcal{S}(f^+) - \mathcal{S}(f^-);$$

où $f^+ : x \mapsto f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^- : x \mapsto f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ sont les fonctions partie positive et partie négative de f .

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, le réel $\tilde{\mathcal{S}}(f)$ est bien défini et que si $f([a, b]) \subset \mathbb{R}_+$ alors $\tilde{\mathcal{S}}(f) \in \mathbb{R}_+$ et $\tilde{\mathcal{S}}(f) = \mathcal{S}(f)$. Dorénavant, on note $\mathcal{S}$ au lieu de $\tilde{\mathcal{S}}$.

25. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Soit $p, q \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Montrer que si $f = p - q$ alors $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(p) - \mathcal{S}(q)$.

Supposons que $f = p - q$. Alors $f^+ + q = p + f^-$. Or avec $f^+, q \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$, donc $\mathcal{S}(f^+ + q) = \mathcal{S}(f^+) + \mathcal{S}(q)$. De même, $\mathcal{S}(p + f^-) = \mathcal{S}(p) + \mathcal{S}(f^-)$. Le résultat suit.

26. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda \mathcal{S}(f)$.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $p, q \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ tels que $f = p - q$ (p.ex. $p = f^+$ et $q = f^-$). Alors $\lambda f = p - q$ où $p, q \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$,

$$\begin{cases} p = \lambda^+ f^+ + \lambda^- f^- \\ q = \lambda^+ f^- + \lambda^- f^+ \end{cases}.$$

Alors $\mathcal{S}(\lambda f) = \mathcal{S}(p) - \mathcal{S}(q)$. Or, d'après les questions 22. et 24,

$$\begin{cases} \mathcal{S}(p) = \lambda^+ \mathcal{S}(f^+) + \lambda^- \mathcal{S}(f^-) \\ \mathcal{S}(q) = \lambda^+ \mathcal{S}(f^-) + \lambda^- \mathcal{S}(f^+) \end{cases}.$$

Donc $\mathcal{S}(\lambda f) = \lambda^+ \mathcal{S}(f) - \lambda^- \mathcal{S}(f)$. D'où le résultat.

Autre rédaction.

Supposons $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors ...

Autrement, $\lambda = -\mu$, où $\mu \in \mathbb{R}_+$. Alors ...

27. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, $\mathcal{S}(f_1 + f_2) = \mathcal{S}(f_1) + \mathcal{S}(f_2)$.

On peut traiter cette tâche comme la précédente.

28. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que $|\mathcal{S}(f)| \leq (\sup |f|)(b - a)$.

[Voie 1] Soit $s \in \mathbb{U}_2 = \{-1; +1\}$. On a $sf \leq e$ où $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ et $e = \sup |f|$. Donc $\mathcal{S}(sf) = \mathcal{S}(e) - \mathcal{S}(e - sf) \leq \mathcal{S}(e)$ car $e - sf \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$. Or $\mathcal{S}(sf) = s\mathcal{S}(f)$. Donc le résultat suit.

[Voie 2] On a $\mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f^+) - \mathcal{S}(f^-)$ avec $\mathcal{S}(f^+), \mathcal{S}(f^-) \in \mathbb{R}_+$. Donc $|\mathcal{S}(f)| \leq \mathcal{S}(f^+) + \mathcal{S}(f^-)$. Or $\mathcal{S}(f^+) + \mathcal{S}(f^-) = \mathcal{S}(f^+ + f^-)$ et $f^+ + f^- = |f|$. Donc $|\mathcal{S}(f)| \leq \mathcal{S}(|f|)$.

De plus $|f| \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $|f| \leq e$ où $e \in \mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $e = \sup |f|$.

D'où le résultat.

Extension aux fonctions complexes

Définition 7. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, on pose

$$\tilde{S}(f) \stackrel{\text{def.}}{=} S(\operatorname{Re}(f)) + iS(\operatorname{Im}(f)) ;$$

où $\operatorname{Re}(f) : x \mapsto \operatorname{Re}(f)(x) = \operatorname{Re}(f(x))$ et $\operatorname{Im}(f) : x \mapsto \operatorname{Im}(f)(x) = \operatorname{Im}(f(x))$ sont les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f .

On vérifie que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, le complexe $\tilde{S}(f)$ est bien défini et que si $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$ alors $\tilde{S}(f) \in \mathbb{R}$ et $\tilde{S}(f) = S(f)$. Dorénavant, on note S au lieu de $\tilde{S}$.

29. Montrer que pour tous $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $S(\bar{f}) = \overline{S(f)}$ et $S(\lambda f) = \lambda S(f)$.

D'après la définition de S , on a

$$\operatorname{Re}(S(f)) = S(\operatorname{Re}(f)) \text{ ET } \operatorname{Im}(S(f)) = S(\operatorname{Im}(f)) ,$$

ce quel que soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$.

Or les applications $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto \lambda z$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, sont des endomorphismes $\mathbb{R}$ -linéaire du plan vectoriel réel $\mathbb{C}$. Donc, d'après la question i. , le résultat suit.

30. Montrer que pour tous $f_1, f_2 \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, $S(f_1 + f_2) = S(f_1) + S(f_2)$.

Comme ci-avant, c'est à cause de la $\mathbb{R}$ -linéarité des opérateurs partie réelle et partie imaginaire (ici, le caractère additif est suffisant).

31. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $|S(f)| \leq (\sup |f|)(b - a)$.

Indication : pour $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, on pourra considérer une écriture exponentielle du complexe $S(f)$ et utiliser l'application partie réelle.

Soit $s \in \mathbb{U}$. On a

$$S(\operatorname{Re}(sf)) \leq (\sup |f|)(b - a)$$

car $\operatorname{Re}(sf) \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$, $|\operatorname{Re}(sf)| \leq |sf|$ et $|sf| = |s||f|$. Or $S(\operatorname{Re}(sf)) = \operatorname{Re}(S(sf))$ et $S(sf) = sS(f)$. Donc

$$\operatorname{Re}(sS(f)) \leq (\sup |f|)(b - a) .$$

En choisissant $s = e^{-i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{S}(f) = e^{i\theta} |\mathcal{S}(f)|$, le résultat suit.

I-D Propriétés de l'intégrale

Définition 8. Pour tout segment J de la droite réelle non réduit à un point, on appelle *intégration sur le segment $[a, b]$ des fonctions complexes continues par morceaux sur $[a, b]$* l'unique opérateur $\int_J : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_J f$, tel que

▷ ET $\forall f_0 \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{C}), \forall f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{C}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\int_J (f_0 + \lambda f) = \int_J f_0 + \lambda \int_J f.$$

▷ ET $\forall c \in J, \forall d \in J, c \leq d \implies \int_J \mathbb{1}_{[c, d]} = d - c.$

▷ ET $\forall f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}), \left| \int_J f \right| \leq (\sup |f|) (b - a).$

I-D-1 Relation de Chasles (simple)

On fixe un segment $J \subset [a, b]$ non réduit à un point. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ on définit la fonction $\text{Pr}(f) \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ définie comme suit :

$$\forall x \in [a, b], \quad \text{Pr}(f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in J \\ 0 & \text{si } x \notin J \end{cases}$$

C'est que l'opérateur Pr prolonge toute fonction f de l'espace $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ en une fonction de l'espace $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ par la valeur 0 en dehors du segment J .

32. Vérifier que l'opérateur $\text{Pr} : \mathcal{CM}(J, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est bien défini et qu'il est linéaire.

Si σ est une subdivision du segment J prouvant la continuité par morceaux de $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ alors $\sigma \cup \{a, b\}$ est une subdivision de $[a, b]$ prouvant la continuité par morceaux de Pr .

Soit $f_0, f_1 \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$ et $\lambda_1 \in \mathbb{K}$. On nomme g_0 et g_1 les images dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ par Pr de f_0 et f_1 respectivement. Alors,

▷ ET $\forall x \in J, (g_0 + \lambda_1 g_1)(x) = (f_0 + \lambda_1 f_1)(x);$

▷ ET $\forall x \in [a, b] \setminus J, (g_0 + \lambda_1 g_1)(x) = 0;$

Donc $g_0 + \lambda_1 g_1$ est l'image dans $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ par Pr de $f_0 + \lambda_1 f_1$.

33. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{K})$, $\int_{[a,b]} \text{Pr}(f) = \int_J f$.

L'opérateur $\mathcal{CM}(J, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, $f \mapsto \int_{[a,b]} \text{Pr}(f)$ respecte les contraintes de la définition 8.

34. En déduire que pour tout $g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, si g est nulle en dehors du segment J , alors $\int_{[a,b]} g = \int_J g|_J$.

Soit $g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$. Supposons que g est nulle en dehors du segment J . Alors $g = \text{Pr}(g|_J)$. D'où le résultat.

Pour tout segment $J \subset [a, b]$ non réduit à une point, pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, on note $\int_J f$ au lieu de $\int_J f|_J$.

35. En déduire la relation de Chasles (simple) :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall c \in]a, b[, \quad \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f = \int_{[a,b]} f$$

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $c \in]a, b[$. On a $\mathbb{1}_{[a,b]} = \mathbb{1}_{[a,c]} + \mathbb{1}_{[c,b]} - \mathbb{1}_{[c,c]}$. Donc

$$f = f \mathbb{1}_{[a,c]} + f \mathbb{1}_{[c,b]} - f(c) \mathbb{1}_{[c,c]}.$$

Le résultat suit car pour tout $A \subset [a, b]$, $f \mathbb{1}_A$ et f admettent la même restriction sur A .

I-D-2 Sous-espace réel engendré par les valeurs

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

36. Montrer que $\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}), \quad f([a, b]) \subset \mathbb{R} \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$.

Supposons qu'une suite de nombres réels (x_n) converge dans le plan complexe, vers un complexe z .

Question. Est-ce z est un réel?

Traitement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\text{Im}(x_n) = 0$. Or $\text{Im}(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{Im}(z)$ et $0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Donc, par unicité de la limite, on a $\text{Im}(z) = 0$.

Réponse. Oui, z est un réel.

Ainsi, d'après les questions 5. et 4. et le traitement de la question 10, le résultat suit car pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ à valeurs réelles, il existe au moins une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier à valeurs réelles (qui converge uniformément vers f) telle que

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} e_n .$$

37. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$,

$$\text{Re} \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \text{Re}(f) \quad \text{ET} \quad \text{Im} \left(\int_{[a,b]} f \right) = \int_{[a,b]} \text{Im}(f) .$$

D'après la linéarité et la question précédente, on a

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}), \quad \int_{[a,b]} f = \underbrace{\int_{[a,b]} \text{Re}(f)}_{\in \mathbb{R}} + i \underbrace{\int_{[a,b]} \text{Im}(f)}_{\in \mathbb{R}} .$$

D'où le résultat.

I-D-3 Positivité et croissance

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

38. Montrer la positivité de l'intégrale :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), \quad f([a, b]) \subset \mathbb{R}_+ \implies \int_{[a,b]} f \in \mathbb{R}_+ .$$

On adapte le traitement de la question 36. car toute limite d'une suite de réels positifs est un réel positif.

39. En déduire la croissance de l'intégrale :

$$\forall f_-, f_+ \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), \quad f_- \leq f_+ \implies \int_{[a, b]} f_- \leq \int_{[a, b]} f_+ .$$

La conjonction de la linéarité et la positivité implique la croissance.

I-D-4 Inégalité triangulaire intégrale

Ici, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Il s'agit à présent de montrer que le module du complexe $\int_{[a, b]} f(x) dx$ est inférieur au réel positif $\int_{[a, b]} |f(x)| dx$. C'est l'inégalité triangulaire intégrale.

40. Dédurre de l'inégalité triangulaire classique l'inégalité visée à l'aide de l'approximation uniforme par les fonctions en escalier.

Soit $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$. Prenons une suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier à valeurs complexes qui converge uniformément vers f .

Alors, d'après l'inégalité triangulaire inversée, la suite de fonctions en escalier $(|e_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $|f|$.

Ainsi,

$$\int_{[a, b]} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} e_n \quad \text{ET} \quad \int_{[a, b]} |f| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} |e_n| .$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en vertu de l'inégalité triangulaire classique (voir 5. et 14),

$$\left| \int_{[a, b]} e_n \right| \leq \int_{[a, b]} |e_n| .$$

D'où l'inégalité triangulaire intégrale, par passage à la limite dans les inégalités larges.

On suppose que $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$.

41. Montrer que $\int_{[a, b]} \pm f(x) dx \leq \int_{[a, b]} |f(x)| dx$. Conclure.

(Voir 28). Soit $s \in \mathbb{U}_2 = \{-1; +1\}$.

Alors $sf \leq |f|$. Donc, en vertu de la croissance de l'intégrale, on a l'inégalité demandée.

Puis de la linéarité de l'intégrale,

$$s \int_{[a,b]} f(x) dx \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx$$

Ce, quel que soit $s \in \mathbb{U}_2$.

D'où l'inégalité triangulaire intégrale.

42. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

Supposons que

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| = \int_{[a,b]} |f(x)| dx$$

Soit $s \in \mathbb{U}_2$ tel que

$$\left| \int_{[a,b]} f(x) dx \right| = s \int_{[a,b]} f(x) dx .$$

Alors la fonction continue positive $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |f(x)| - sf(x)$ est d'intégrale nulle. Donc elle est nulle.

En somme, comme f est continue à valeurs dans la droite des nombres réels, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire intégrale si, et seulement si, soit f est à valeurs dans la demi-droite des réels positifs, soit f est à valeurs dans la demi-droite des réels négatifs.

On ne suppose plus que $f([a, b]) \subset \mathbb{R}$.

43. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\int_{[a,b]} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(x)) dx \leq \int_{[a,b]} |f(x)| dx$. Conclure.

(Voir 31). Comme pour la question 41, on adapte le traitement de la question 31.

44. On suppose de plus que f est continue. Traiter le cas d'égalité.

À l'aide de ce que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{R}_+ \iff \operatorname{Re}(z) = |z| ,$$

on adapte le traitement de la question 42. pour trouver que : comme f est continue à valeurs dans le plan des nombres complexes, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire intégrale si, et

seulement si, f est à valeurs dans une certaine demi-droite réelle du plan complexe issue de 0 .

DEBUT ↖