FIN ↘

DM17 pour lundi 02/06

(avec corrigé)

Table des matières

I Initiation à la théorie des graphes

Vocabulaire commun à tout le problème.

- Pour tout n entier, $n \geqslant 1$, on notera $\mathscr{P}_2(n)$ l'ensemble des parties à deux éléments de $[\![1, n]\!]$.

- On définit un **graphe** $\mathscr{G} = (\mathscr{S}, \mathscr{A})$ par

▷ un ensemble fini $\mathscr{S}$, de cardinal noté n, dont les éléments sont appelés **sommets**. Ici l'ensemble $\mathscr{S}$ sera systématiquement égal à $[\![1, n]\!]$.

▷ un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}_2(n)$, c'est-à-dire un ensemble dont les éléments, appelés **arêtes**, sont de la forme $\{i, j\}$ avec $(i, j) \in \mathscr{S}$, $i < j$.

- On représentera commodément les sommets d'un graphe par des points, et les arêtes par des segments les reliant. L'exemple de la figure 1 montre le graphe de sommets $[\![1, 5]\!]$, d'arêtes

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}.$$

- On dit que deux sommets i et j sont **reliés** s'il existe un entier k et des indices $i_1, \dots, i_k$ vérifiant $i_1 = i$, $i_k = j$ et

$$\forall \ell \in \{1, \dots, k-1\} \quad \{i_\ell, i_{\ell+1}\} \in \mathscr{A}.$$

On dit que le **chemin** $i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k$ relie i et j.
La **longueur** du chemin est le nombre d'arêtes qui le composent. Dans la figure 1, les sommets 2 et 3 sont reliés par le chemin $2 \to 5 \to 3$. Il n'y a, en général, pas unicité d'un chemin reliant deux points.

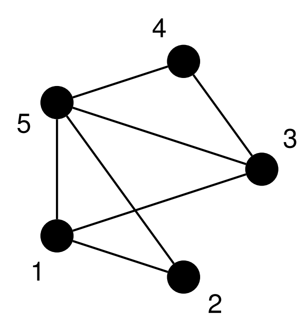


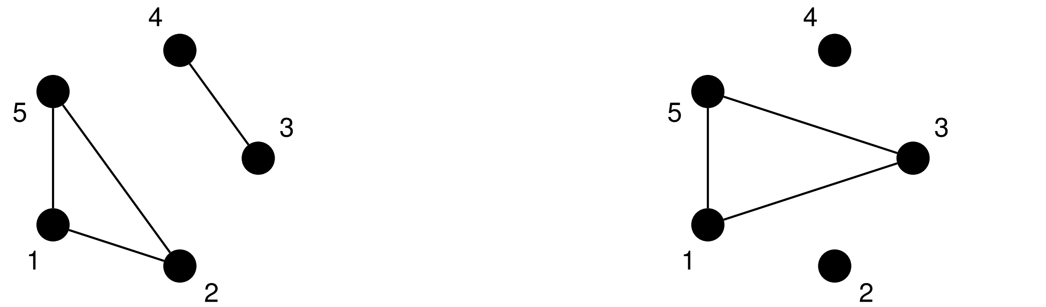
FIGURE 1 – **Un exemple**

- On dit que le graphe $\mathscr{G}$ est **connexe** si deux sommets quelconques sont toujours reliés. On dit qu'un sommet i est **isolé** s'il ne possède aucun voisin.

- À titre d'exemple, le graphe 1 est connexe ; le graphe 2a n'est pas connexe et 2b n'est pas connexe, avec, de plus, les points 2 et 4 qui sont isolés.

- Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes attachées à ce sommet. Par exemple, figure 1, le sommet 2 est de degré 2, le sommet 1 est de degré 3, le sommet 5 est de degré 4. Un sommet est donc isolé s'il est de degré nul.

walter.ngambou@ac-versailles.fr



(a) Un graphe non connexe, sans point isolé (b) Un graphe non connexe, avec points isolés

FIGURE 2 – **Deux graphes non connexes**

• On définit enfin deux matrices liées aux graphes : si $\mathscr{G}$ est un graphe de sommets $\mathscr{S} = [\![1, n]\!]$ et d'ensemble d'arêtes $\mathscr{A}$, on définit

∗ la **matrice d'adjacence** de $\mathscr{G}$, notée A, par

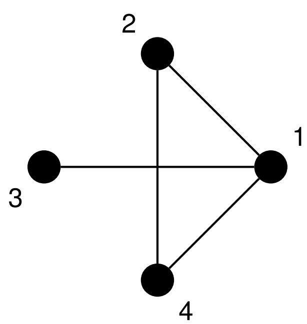
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [A]_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } \{i,j\} \in \mathscr{A} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

∗ la **matrice laplacienne** de $\mathscr{G}$, notée L, par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ [L]_{i,j} = \begin{cases} -1 \text{ si } \{i,j\} \in \mathscr{A}, \\ d_i \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

où d_i désigne le degré du sommet i.

À titre d'exemple, voici un graphe, sa matrice d'adjacence et sa matrice laplacienne.



(a) Un graphe

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Sa matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(c) Sa matrice laplacienne

FIGURE 3 – **Un graphe et ses deux matrices**

La partie I-A permet de faire un peu de dénombrement dans les graphes.

La partie I-B permet de comprendre comment les matrices, et notamment la notion de rang d'une matrice, sont reliées à la théorie des graphes.

La partie I-C, complètement indépendante de la partie I-B, permet d'étudier des graphes aléatoires et d'établir une asymptotique du nombre de points isolés dans un graphe aléatoire.

Conseil. Bien que les deux principales parties du problème soient indépendantes, le vocabulaire utilisé sera le même : il est primordial de prendre du temps pour s'approprier les nouvelles notions de théorie des graphes.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Amusant. Le fil rouge de ce problème est la notion de **connexité.** La dernière question de chacune des parties a trait à la notion de connexité d'un graphe.

Remarque. Après une bonne vingtaine de minutes à vous approprier les notations, quatre questions utilisent beaucoup les notions présentées précédemment et sont sensiblement plus difficiles que les autres : elles sont marquées d'une étoile (*) afin que vous puissiez les identifier et reporter leur traitement à un autre moment si besoin est.

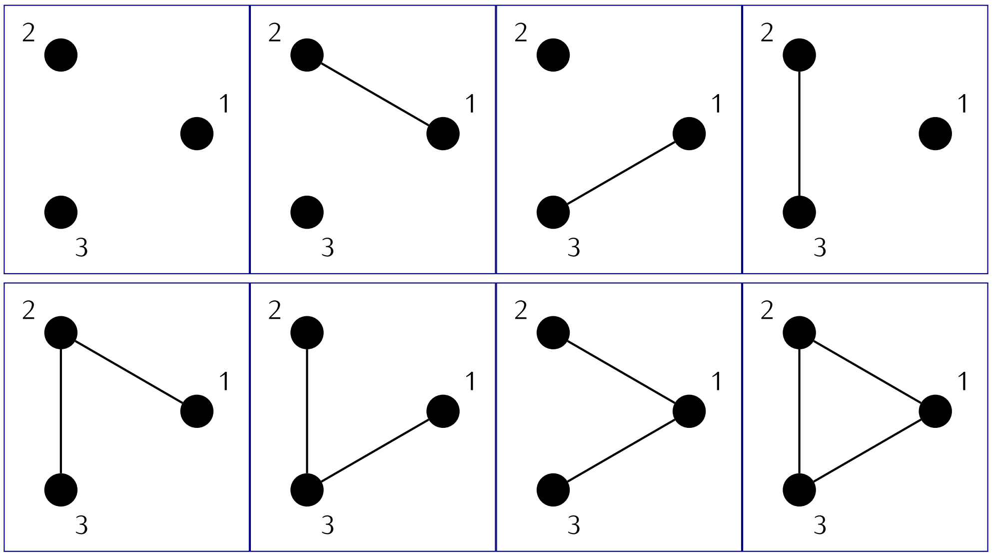
walter.ngambou@ac-versailles.fr

I-A Dénombrement dans les graphes

1. Donner, sans justifier, le cardinal de $\mathcal{P}_2(n)$. En déduire le nombre de graphes à n sommets. Dessiner, à titre d'exemple, les 8 graphes à 3 sommets.

On sait, par le cours qu'il y a $\binom{n}{2}$ parties de $[\![1, n]\!]$ à n éléments.
Choisir un graphe à n sommets, c'est choisir, pour chacune des arêtes, i.e. chaque partie à deux éléments de $[\![1, n]\!]$, si on la met ou pas dans le graphe. D'où $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ possibilités.

Voici les 8 graphes à 3 sommets.



---

2. (*) Si $\mathscr{G}$ est un graphe dont les sommets sont $\mathscr{S} = [\![1, n]\!]$ et l'ensemble des arêtes et $\mathscr{A}$, on note d_i le degré du sommet i. Expliquer (ou mieux, démontrer !) pourquoi

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2\,\mathrm{Card}(\mathscr{A}).$$

Avec les mains. On sépare les arêtes en 2 : chaque sommet qu'elle relie compte pour une demi-arête. Si un sommet a un degré d_i, cela signifie que le sommet a $\frac{d_i}{2}$ arêtes. Au final, en comptant les degrés de tous les sommets, on aura compté toutes les arêtes, d'où $\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{2} = \mathrm{Card}(\mathscr{A})$.

Plus proprement. On démontre l'identité en comptant deux fois les objets. On considère l'ensemble

$$E = \{(i,j),\ \{i,j\} \in \mathscr{A}\} \text{ et } \forall i \in [\![1, n]\!],\ E_i = \{(i,j),\ \{i,j\} \in \mathscr{A}\}.$$

Subtilité, ce sont les **couples** que l'on compte et pas les paires. Ainsi, on comptera $(1,2)$ **et** $(2,1)$. Ainsi, $\mathrm{Card}(E) = 2\,\mathrm{Card}(\mathscr{A})$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Mais on peut compter les choses autrement : si on note V_i l'ensemble des voisins directs de i, on peut dire que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_i &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(V_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\left(\{j \in [\![1,n]\!],\ (i,j) \in \mathscr{A}\}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\left(E_i\right) = \mathrm{Card}(E) = 2\,\mathrm{Card}(\mathscr{A})\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré !

---

3. (*) Soit $\mathscr{G}$ un graphe, M sa matrice d'adjacence. Démontrer par récurrence que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, le coefficient (i,j) de M^k est le nombre de chemins de longueur k reliant i à j.

Deuxième question délicate. On note $\mathcal{P}_k$ la proposition : « le coefficient (i,j) de M^k est le nombre de chemins de longueur k reliant i à j ».

Initialisation. M est la matrice d'adjacence du graphe. Donc $[M]_{i,j} = 1$ si et seulement si i et j sont reliés par une arête. Or, il y a un chemin de longueur 1 reliant i à j si et seulement s'il y a une arête reliant i à j. L'initialisation est donc démontrée.

Hérédité. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_k$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors

$$[M^{k+1}]_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{i,\ell}[M^k]_{\ell,j}.$$

Or, **choisir** un chemin de longueur $k+1$ reliant i à j, c'est **choisir un voisin de** i, ℓ, puis choisir un chemin de longueur k reliant ℓ à j : il y en a $[M^k]_{\ell,j}$. Ainsi, il y a

$$\sum_{\ell \text{ voisin de } i} [M^k]_{\ell,j}$$

chemins de longueur $k+1$ reliant i à j. Mais comme $[M]_{i,\ell} = 0$ si ℓ n'est pas un voisin de i, 1 si ℓ est un voisin de i, on en déduit que

$$\sum_{\ell \text{ voisin de } i} [M^k]_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{n} [M]_{i,\ell}[M^k]_{\ell,j},$$

donc $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} [M]_{i,\ell}[M^k]_{\ell,j}$. est le nombre de chemins de longueur $k+1$ reliant i à j.

I-B Utilisation de matrices en théorie des graphes

Si M est une matrice, on note f_M l'application linéaire canoniquement associée.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

I-B-1 Le graphe complet

Dans cette partie, on considère le graphe complet, c'est-à-dire le graphe où tous les sommets sont reliés les uns avec les autres. La matrice d'adjacence du graphe est $J_n - \mathrm{I}_n$ où $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

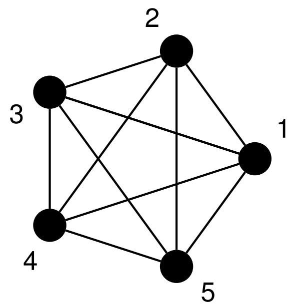


FIGURE 4 – **Le graphe complet à 5 sommets.**

4. On note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $J_n U$, déterminer $\operatorname{Ker}(J_n)$, puis démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de f_{J_n} est $\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et celle de f_{L_n} est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$. (où L_n désigne la matrice laplacienne du graphe complet) Calculer L_n^p pour p dans $\mathbb{N}^*$.

Ah ! Du cours ! Chouette, le prof nous l'avait promis.

On calcule

$$J_n U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = nU.$$

Ensuite, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors on a les équivalences

$$X \in \operatorname{Ker}(J_n) \Leftrightarrow J_n X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0.$$

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Or, une base de l'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$ est

$$(X_2, \ldots, X_n) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c'est une famille libre de $n-1$ éléments de H, qui est de dimension $n-1$)

Comme $U \notin H$, on en déduit que $\text{Vect}(U) \oplus H = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $(U, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme $J_n U = nU$, $J_n X_k = 0_{n,1}$ pour tout k dans $[\![2, n]\!]$, on en déduit que dans la base $(U, X_2, \ldots, X_n)$, la matrice de f_{J_n} est

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus $L_n = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \cdots & \cdots & n-1 \end{pmatrix} = -J_n + n\mathrm{I}_n$: en effet, le degré de chaque point est de $n-1$. On en déduit que la matrice de $f_{-J_n + n\mathrm{I}_n}$ est

$$-\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} + n\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = A$$

On remarque alors que $A^p = n^{p-1} A$, donc $L_n^p = n^{p-1} L_n$.

I-B-2 Le graphe cyclique

On note $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, et $W_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_k \\ \omega_k^2 \\ \vdots \\ \omega_k^{n-1} \end{pmatrix}$. On note Q la matrice dont les colonnes sont $W_0, \ldots, W_{n-1}$, i.e. $Q = (\omega_{j-1}^{i-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

5. Calculer, pour k dans $\mathbb{N}$, C^k. Vérifier que $C^{-1} = C^\top$.

Plusieurs manières de calculer C^k.

▷ ou bien on fait « à la main » pour voir que $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et C^k est la même matrice où on décale en bas à gauche les diagonales. En particulier, $C^n = \mathrm{I}_n$ et donc $C^{-1} = C^{n-1} = C^\top$.

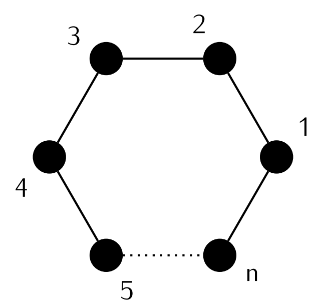
▷ ou bien on écrit que $[C]_{i,j} = \delta_{i,j+1[n]}$, où $i, j+1[n]$ signifie « $i = j+1$ modulo n ». Ainsi, $[C^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k+1[n]}\delta_{k,j+1[n]} = \delta_{i,j+2[n]}$ et, de manière plus générale, $[C^k]_{i,j} = \delta_{i,j+k[n]}$.

▷ ou bien on dit que si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, C est la matrice de f_C l'application telle que $f_C(e_1) = e_2$, $f_C(e_2) = e_3$, etc., et $f_C(e_n) = e_1$.

Ainsi, $f^k(e_1) = e_{k+1}, \ \dots, f^k(e_{n-k}) = e_n$, puis $f^k(e_{n-k+1} = e_1$, etc., ce qui explique la forme des matrices de C^k.

6. Dessiner le graphe $\mathscr{G}_0$ de matrice d'adjacence $C + C^\top$. On l'appelle graphe cyclique élémentaire. Démontrer que la matrice laplacienne de $\mathscr{G}_0$ est $L = 2\mathrm{I}_n - C - C^{-1}$.

On dessine le graphe suivant



Comme chaque sommet i est adjacent au sommet $i+1$ et au sommet $i-1$, on en déduit que la matrice d'adjacence de $\mathscr{G}_0$ est $C + C^\top$.

Comme le degré de chaque sommet est égal à 2, on en déduit que la matrice laplacienne du graphe est égale à $2\mathrm{I}_n - (C + C^\top)$.

7. Écrire la matrice de l'application $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ P & \longmapsto & (P(\omega_0), \dots, P(\omega_{n-1})) \end{array} \right.$ dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ au départ et dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à l'arrivée. En déduire que Q est inversible.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Hmm, on a déjà fait cette question en cours, non ? On remarque que si $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, alors

$$\varphi(X^\ell) = (\omega_0^\ell, \omega_1^\ell, \dots, \omega_{n-1}^\ell).$$

Ainsi, la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ au départ et dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à l'arrivée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 & \cdots & \omega_0^{n-1} \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1}^2 & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Comme $(\omega_0, \dots, \omega_{n-1})$ sont deux à deux distincts, φ est inversible par le théorème d'interpolation de Lagrange. Ainsi, la matrice A est inversible, donc $Q = A^\top$ est inversible !

---

8. Démontrer que $CW_k = \dfrac{1}{\omega_k} W_k$, que $(W_0, W_{n-1}, W_{n-2}, \dots, W_1)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de f_C est

$$\begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \omega_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice de f_L dans cette base est une matrice **réelle** dont on précisera les coefficients.

On calcule alors

$$CW_k = \begin{pmatrix} \omega_k^{n-1} \\ \omega_k \\ \vdots \\ \omega_k^{n-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_k} W_k,$$

car $\dfrac{1}{\omega_k}\omega_k^0 = \dfrac{1}{\omega_k} = \dfrac{\omega_k^n}{\omega_k} = \omega_k^{n-1}$.

On a vu que Q était inversible, donc $(W_0, \dots, W_{n-1})$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, donc $(W_{n-1}, \dots, W_0)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Dans cette base, la matrice de f_C est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\omega_{n-1}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{1}{\omega_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \omega_{n-1} \end{pmatrix}$$

car $\dfrac{1}{\omega_0} = 1 = \omega_0$ et si $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{\omega_k} = \mathrm{e}^{-\frac{2ik\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2i(n-k)\pi}{n}}$.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

On en déduit que la matrice dans cette base de f_{L_n} est

$$2\mathrm{I}_n - \begin{pmatrix} \omega_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \omega_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\omega_0)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\omega_1)^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & (\omega_{n-1})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Il s'agit donc d'une matrice diagonale dont le coefficient diagonal (k, k) est

$$2 - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{-2ik\pi}{n}} = 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}.$$

Cette matrice est donc réelle !

I-B-3 Rang et connexité

Une remarque : il s'agit des questions plus délicates de la partie B.

Si $\mathscr{G}$ est un graphe de sommets $\mathscr{S} = [\![1, n]\!]$ et d'ensemble d'arêtes $\mathscr{A}$, L sa matrice laplacienne. On note d_i le degré du sommet i.

9. (*) Démontrer que pour tout $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$V^\top L V = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2 - \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i v_k = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ \{i,j\} \in \mathscr{A}}} (v_i - v_j)^2.$$

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$[LV]_i = \sum_{k=1}^{n} [L]_{ik} v_k,$$

donc

$$V^\top L V = \sum_{i=1}^{n} [V^\top]_i [LV]_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [L]_{ik} v_i v_k.$$

Là, il faut bien réfléchir. Si $i \neq k$, alors $[L]_{ik} = -1$ si $\{i, k\}$ est une arête, 0 sinon. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [L]_{ik} v_i v_k = \sum_{i=1}^{n} d_i v_i^2 - \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i v_k.$$

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Mais on peut écrire astucieusement que

$$d_i v_i^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i^2,$$

donc, et c'est magique,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [L]_{ik} v_i v_k = \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i^2 - v_i v_k$$

Donc

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} [L]_{ik} v_i v_k &= \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i^2 - v_i v_k + \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i^2 - v_i v_k \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i^2 - v_i v_k + \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_k^2 - v_k v_i \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} v_i^2 - 2v_i v_k + v_k^2 = \sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} (v_i - v_k)^2. \end{aligned}$$

---

10. (*) Démontrer que si $\mathscr{G}$ est connexe si, et seulement si $\mathrm{rg}\,(L) = n-1$. *On pourra vérifier que si* $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$*, alors* $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Ker}\,(L)$ *et que l'on a égalité lorsque* $\mathscr{G}$ *est connexe.*

Suivons les indications !

a. Déjà, on remarque que si $i \in [\![1, n]\!]$, $[LU]_i = \sum_{k=1}^{n} [L]_{ik} = d_i + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} -1 = d_i - d_i = 0$, donc $U \in \mathrm{Ker}\,(L)$. Donc $\mathrm{rg}\,(L) \leqslant n-1$.

b. Ensuite, si $\mathscr{G}$ est connexe, soit $V \in \mathrm{Ker}\,(L)$. Alors $LV = 0$ donc $V^\top LV = 0$, donc

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i,k \leqslant n \\ \{i,k\} \in \mathscr{A}}} (v_i - v_k)^2 = 0.$$

Donc, pour tout $\{i, k\} \in \mathscr{A}$, $v_i = v_k$.

Soit (i, k) quelconques maintenant ! Comme $\mathscr{G}$ est **connexe**, il existe $i_1, \ldots, i_r$ tels que $i_1 = i$, $i_r = k$ et $i_1 \to i_2 \to i_k$ sont reliés par des arêtes. Donc $v_{i_1} = v_{i_2}$, $v_{i_2} = v_{i_3}$,... $v_{i_{r-1}} = v_{i_r}$. Donc $v_i = v_k$. Donc $v_1 = \cdots = v_n$, donc $V = v_1 U$. Youpi, on a le noyau.

c. Enfin, si $\mathscr{G}$ **n'est pas connexe**, on peut trouver deux parties de $\mathscr{G}$ qui ne sont rattachées par aucune arête, notons-les $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$, avec des sous-ensembles $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ de $[\![1, n]\!]$ et des sous-ensembles $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ de $\mathscr{A}$. Ainsi, si on prend V avec des 1 pour tous les i dans $\mathscr{S}_1$ et des 0 sinon, on aura $V \in \mathrm{Ker}\,(L)$. Donc $\mathrm{rg}\,(L) < n-1$ car $\mathrm{Ker}\,(L)$ est de dimension $\geqslant 2$!

---

walter.ngambou@ac-versailles.fr

I-C Points isolés dans un graphe aléatoire

Dans toute cette partie,

▷ n est un entier naturel non nul. Par commodité, on note $m = \binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

▷ $(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé fini.

▷ $\mathscr{G}$ est un graphe dont l'ensemble des sommets $\mathscr{S} = [\![1, n]\!]$ est déterministe (il ne dépend pas de $\omega \in \Omega$), mais dont l'ensemble des arêtes $\mathscr{A}$ est aléatoire.

▷ On se donne une famille $(X_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ de m variables aléatoires mutuellement indépendantes, identiquement distribuées de même loi $\mathscr{B}(p)$, où p est un réel, $0 < p < 1$.

▷ Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $\mathscr{G}(\omega) = (\mathscr{S}, \mathscr{A}(\omega))$ où

$$\mathscr{A}(\omega) = \{\{i, j\} \in \mathscr{P}_2(n),\ i < j \text{ et } X_{i,j}(\omega) = 1\}$$

En termes usuels, une paire $\{i, j\}$ donné est une arête de A avec la probabilité p, et ce de manière indépendante des autres paires. Le nombre p sera désigné sous le nom de probabilité de connexion.

▷ On note N la variable aléatoire égale au nombre d'arêtes du graphe $\mathscr{G}$, c'est-à-dire le cardinal de $\mathscr{A}$:

$$\forall \omega \in \Omega \quad N(\omega) = \mathrm{Card}(\mathscr{A}(\omega))$$

I-C-1 Généralités

11. Déterminer la loi de N en fonction des paramètres $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et p. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$.

$N = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_{ij}$: en effet, il s'agit du nombre de X_{ij} égaux à 1, donc, comme les X_{ij} valent 0 ou 1, il suffit de faire la somme de ces variables.

Donc N est une somme de $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p, donc $N \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Ainsi, par le cours, $\mathbb{E}(N) = np$ et $\mathbb{V}(N) = np(1-p)$.

I-C-2 Points isolés

Dans toute la suite, l'entier n n'est plus fixé, et on étudiera notamment certaines propriétés asymptotiques valables dans la limite $n \to +\infty$. Notamment, la probabilité que deux sommets soient reliés pourra dépendre de n, et on la notera donc p_n. Pour les autres objets (le graphe, l'univers probabilisé), la dépendance en n pourra être gardée implicite.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

Le but de cette partie est d'étudier le nombre Y_n de points isolés dans le graphe à n sommets caractérisé par une probabilité de connexion p_n.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note I_k la variable aléatoire indicatrice de l'événement « le sommet k est isolé » (c'est-à-dire que $\mathrm{I}_k(\omega) = 1$ si le sommet k est isolé dans $(\mathscr{S}, \mathscr{A}(\omega))$, et $\mathrm{I}_k(\omega) = 0$ sinon).

12. Montrer que les variables aléatoires I_k suivent une loi de Bernoulli de même paramètre q_n à déterminer.

Déjà, I_k est une variable aléatoire indicatrice d'un événement, c'est donc une variable de Bernoulli.

Ensuite, un point est isolé si et seulement si aucune arête n'est attachée à ce point.

$$\begin{aligned} q_n &= \mathbb{P}(\mathrm{I}_k = 1) \\ &= \mathbb{P}(X_{1,k} = 0, X_{2,k} = 0, \dots, X_{k-1,k} = 0, X_{k,k+1} = 0, \dots, X_{k,n} = 0) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_{i,k} = 0) \prod_{i=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_{k,i} = 0) = (1 - p_n)^{n-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{I}_k \sim \mathscr{B}((1 - p_n)^{n-1})$.

---

13. Déterminer la valeur de $\mathbb{E}(Y_n)$.

Comme Y_n est le nombre de points isolés, $Y_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_k$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathrm{I}_k) = n(1 - p_n)^{n-1}.$$

---

14. Soient i et j deux entiers distincts de $[\![1, n]\!]$. Calculer la probabilité que les deux sommets i et j soient isolés. En déduire $\mathrm{Cov}(\mathrm{I}_i, \mathrm{I}_j)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

La probabilité que i **et** j soient isolés est la probabilité qu'aucune des arêtes partant de i ou de j ne soit présente dans le graphe. Or, il y a potentiellement $n - 1 + n - 2 = 2n - 3$ arêtes attachées à i ou j ($n - 1$ partant de i et $n - 2$ partant de j, car on a déjà compté $\{i, j\}$). Ainsi, la probabilité que i et j soient isolés est

$$(1 - p_n)^{2n-3}$$

Remarque : il s'agit du paramètre de $\mathrm{I}_i \mathrm{I}_j$. On en déduit que

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{I}_i, \mathrm{I}_j) = \mathbb{E}(\mathrm{I}_i \mathrm{I}_j) - \mathbb{E}(\mathrm{I}_i)\,\mathbb{E}(\mathrm{I}_j) = (1 - p_n)^{2n-3} - (1 - p_n)^{2n-2} = p_n(1 - p_n)^{2n-3}.$$

walter.ngambou@ac-versailles.fr

On en déduit que

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(Y_n) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(\mathrm{I}_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathrm{Cov}(\mathrm{I}_i, \mathrm{I}_j) \\ &= n(1-p_n)^{n-1}\left(1-(1-p_n)^{n-1}\right) + 2\frac{n(n-1)}{2} p_n (1-p_n)^{2n-3} \\ &= n(1-p_n)^{n-1} - n(1-p_n)^{2n-2} + (n^2-n)p_n(1-p_n)^{2n-3}.\end{aligned}$$

Cas des graphes « denses » On suppose que la dépendance en n de la probabilité de connexion p_n est de la forme

$$p_n = f(n)\frac{\ln n}{n} \quad \text{où } f \text{ est une fonction telle que } f(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

15. Montrer que $\ln(1-x) \leqslant -x$ pour tout $x \in [0,1[$. En déduire que $\mathbb{E}(Y_n) \to 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Par concavité de ln, on sait que pour tout h tel que $1+h \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+h) \leqslant h$. Ainsi, pour tout x dans $[0,1[$, $\ln(1-x) \leqslant x$. On en déduit que, comme $\mathbb{E}(Y_n) = n\,\mathrm{e}^{(n-1)\ln(1-p_n)}$,

$$0 \leqslant \mathbb{E}(Y_n) \leqslant n\,\mathrm{e}^{-(n-1)p_n} = n\,\mathrm{e}^{-\frac{n-1}{n} f(n)\ln(n)} = \mathrm{e}^{\ln(n) - \frac{n-1}{n} f(n)\ln(n)}.$$

Or,

$$\ln(n) - \frac{n-1}{n} f(n)\ln(n) = \ln(n)\left(1 - \frac{n-1}{n} f(n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

donc, par encadrement, $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

---

16. Que peut-on dire de $\mathbb{P}(Y_n > 0)$ quand $n \to \infty$? Interpréter le résultat obtenu.

Comme $\mathbb{P}(Y_n > 0) = \mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \leqslant \mathbb{E}(Y_n)$ par l'inégalité de Markov, on en déduit que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui signifie que, lorsque n est très grand, le graphe a très peu de chances d'avoir de points isolés (ce qui est cohérent avec le qualificatif de « graphe dense »).

Cas des graphes « peu denses » On suppose désormais que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

17. Soient U et V deux variables aléatoires réelles. **Démontrer** l'inégalité suivante

$$\mathbb{E}(UV)^2 \leqslant \mathbb{E}\left(U^2\right)\mathbb{E}\left(V^2\right)$$

C'est une question de cours ! Je ne la refais pas.

walter.ngambou@ac-versailles.fr

18. Soit $W \geqslant 0$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, telle que $\mathbb{E}\left(W^2\right) > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}(W > 0) \geqslant \frac{\mathbb{E}(W)^2}{\mathbb{E}\left(W^2\right)}$$

Il s'agit de bien utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On remarque que $W \leqslant W 1_{\{\}} W > 0$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(W)^2 \leqslant \mathbb{E}(W 1_{\{\}} W > 0)^2 \leqslant \mathbb{E}(W^2)\, \mathbb{E}(1_{\{\}} W > 0^2) = \mathbb{E}(W^2)\, \mathbb{P}(W > 0).$$

Ceci permet d'établir l'inégalité désirée !

---

19. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathbb{E}\left(Y_n\right)^2}{\mathbb{E}\left(Y_n^2\right)}$. Que peut-on en déduire sur la probabilité que le graphe $\mathscr{G}$ soit connexe quand $n \to \infty$?

On calcule la quantité demandée : on sait que $\mathbb{E}(Y_n)^2 = n^2(1-p_n)^{2n-2}$ et que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_n^2) &= \mathbb{V}(Y_n) + \mathbb{E}(Y_n)^2 \\
&= n(1-p_n)^{n-1} - n(1-p_n)^{2n-2} + (n^2-n)p_n(1-p_n)^{2n-3} + n^2(1-p_n)^{2n-2} \\
&= n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}\left(1 - p_n + p_n\right) \\
&= n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y_n > 0) \geqslant \frac{n^2(1-p_n)^{2n-2}}{n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}}$$

Or,

$$n(1-p_n)^{n-1} = n\, \mathrm{e}^{(n-1)\ln(1-p_n)} = \mathrm{e}^{\ln(n)+(n-1)\ln(1-p_n)},$$

et $(n-1)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1)p_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$, donc $\ln(n)+(n-1)\ln(1-p_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $n(1-p_n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi,

$$n(1-p_n)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2(1-p_n)^{2n-2}\right),$$

donc

$$\frac{n^2(1-p_n)^{2n-2}}{n(1-p_n)^{n-1} + n(n-1)(1-p_n)^{2n-3}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 - p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(Y_n \geqslant 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc la probabilité que $\mathscr{G}$ ne soit pas connexe tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, car $\{Y_n \geqslant 1\}$ est inclus dans l'événement « $\mathscr{G}$ n'est pas connexe. »

---

walter.ngambou@ac-versailles.fr

I-D Bonus

On considère $\mathscr{G} = (\mathscr{S}, \mathscr{A})$ un graphe, où $\mathscr{S} = [\![1, n]\!]$.

20. Démontrer que si $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) < n - 1$, alors $\mathscr{G}$ n'est pas connexe.

On démontre le résultat par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 2$, si $\mathscr{G}$ a strictement moins de 1 arête, il n'en a pas et $\mathscr{G}$ n'est en effet pas connexe.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition est vraie. Soit $\mathscr{G}$ un graphe à $n+1$ sommets avec $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) < n$. Alors il existe au moins un sommet de $\mathscr{G}$ de degré inférieur ou égal à 1 : en effet, si tous les sommets étaient de degré au moins 2, alors par la question 2, il y aurait au moins n arêtes. Notons s ce sommet.

Si s est de degré 0, c'est gagné, $\mathscr{G}$ n'est pas connexe.

Sinon, retirer s ne change pas la connexité de $\mathscr{G}$ (car s n'est relié qu'à un seul autre sommet). Le graphe $\mathscr{G}'$ obtenu comporte un nombre $< n - 1$ d'arêtes donc n'est pas connexe. Donc $\mathscr{G}$ n'est pas connexe.

D'où l'hérédité et le résultat !

---

21. Démontrer que si $\mathrm{Card}(\mathscr{A}) > \binom{n-1}{2}$, alors $\mathscr{G}$ est connexe.

Joli argument ! Cherchons le nombre d'arêtes maximal d'un graphe non connexe. Un graphe non connexe possède deux sous-graphes $\mathscr{G}_1$ et $\mathscr{G}_2$, i.e. deux parties $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ de $[\![1, n]\!]^2$ telles que $\mathscr{S}_1 \sqcup \mathscr{S}_2 = [\![1, n]\!]$, tels que les sommets de $\mathscr{S}_1$ et ceux de $\mathscr{S}_2$ ne soient pas reliés. Pour avoir le nombre maximal d'arêtes, il faut que tous les sommets de $\mathscr{S}_1$ soient reliés entre eux, de même pour ceux de $\mathscr{S}_2$.

Si $\mathrm{Card}(\mathscr{S}_1) = k$, cette configuration correspond au graphe complet, i.e. avec $\dfrac{n(n-1)}{2}$ arêtes, auquel on a retiré toutes les arêtes reliant les éléments de $\mathscr{S}_1$ aux éléments de $\mathscr{S}_2$: il y a $k(n-k)$ arêtes du genre. Or, $k(n-k)$ est **minimal** lorsque $k = 1$ ou $k = n - 1$ (et on veut k minimal). Donc le graphe non connexe comportant le plus d'arêtes possibles en contient $\dfrac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = \dbinom{n-1}{2}$. Donc si $\mathscr{G}$ contient strictement plus de $\dbinom{n-1}{2}$ arêtes, il est connexe !

---

22. Pour faire suite à la question 10, que vaut $\mathrm{rg}\,(L)$ lorsque L est la matrice laplacienne de $\mathscr{G}$ (et que $\mathscr{G}$ n'est pas nécessairement connexe) ? On pourra l'exprimer à l'aide du nombre de composantes connexes de $\mathscr{G}$, c'est-à-dire le nombre de classes d'équivalence pour la relation $\sim$ sur $\mathscr{S}$: $s_1 \sim s_2$ si s_1 et s_2 sont reliés par un chemin.

C'est une question pas si évidente, ou triviale si on comprend ce qu'il se passe : si $\mathscr{G}$ possède r composantes connexes, $\mathscr{S}_1, \dots, scS_r$ (on nomme ainsi les ensembles de sommets), et si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(L)$, on sait que pour tous i et j reliés,

walter.ngambou@ac-versailles.fr

$v_i = v_j$. Ainsi, les coordonnées de V sont constantes sur chaque composante connexe de G. Si $\mathscr{S}_k$ est une composante connexe et que l'on définit $e_k = (\delta_{i\in\mathscr{S}_k})_{1\leqslant i\leqslant n}$ (le vecteur avec des « 1 » pour les indices correspondant à la composante connexe, des 0 sinon), alors $V \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

Réciproquement, et j'ai la flemme de le vérifier (c'est bientôt les vacances...), si $V \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$, alors $V \in \mathrm{Ker}\,(L)$ et $(e_1, \dots, e_r)$ est une famille libre, donc $\mathrm{Ker}\,(L)$ est de dimension r, donc $\mathrm{rg}\,(L) = n - r$.

Exercice 1 (*Initiation à la réduction des endomorphismes (diagonalisation ici*)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Pour tout vecteur $\boldsymbol{v} \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que

- ▷ le vecteur $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de l'endomorphisme f associé au scalaire λ, ou que le scalaire λ est une valeur propre de l'endomorphisme f associée au vecteur $\boldsymbol{v}$, si, et seulement si, $\boldsymbol{v} \neq 0_E$ ET $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$;
- ▷ le vecteur $\boldsymbol{v}$ est un vecteur propre de l'endomorphisme f si, et seulement si, on peut lui associer au moins une valeur propre.
- ▷ le scalaire λ est une valeur propre de l'endomorphisme f si, et seulement si, λ on peut lui associé au moins un vecteur propre ;

1. Montrer que tout vecteur propre $\boldsymbol{v}$ de f admet exactement une valeur propre.

Si $\lambda\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ alors $\lambda = \mu$ car $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_E$.

---

2. Montrer que tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, l'endomorphisme $f - \lambda\mathrm{id}_E$ est non injectif.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $\boldsymbol{v} \in E$, on a $f(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v} \iff (f - \lambda\mathrm{id}_E)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_E$.

Ainsi, par définition, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, la noyau de l'application linéaire $(f - \lambda\mathrm{id}_E)$ comprend au moins un vecteur non nul. D'où le résultat par caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau.

---

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, puis $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ fixés deux à deux distincts (question 3, 4, 5). Montrer que les noyaux $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i\mathrm{id}_E)$ sont en somme directe, à savoir que l'application suivante est injective : $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda_1\mathrm{id}_E) \times \dots \times \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_n\mathrm{id}_E) \to E,\ (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \mapsto \boldsymbol{v}_1 + \dots + \boldsymbol{v}_n$.

On utilise la caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau. Puis on reprend adapte le traitement du TD17 / Exercice 4 / Question 5.

---

walter.ngambou@ac-versailles.fr

4. En déduire que toute famille de n vecteurs propres associés respectivement aux λ_i est libre.

Voir TD17 / Exercice 4 / Question 5.

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale si, et seulement si, la liste des colonnes de P est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de l'endomorphisme $X \mapsto AX$, qu'on notera A.

Considérer l'exemple traité en salle de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; puis démontrer une double implication.

6. Monter que toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, son déterminant $ad - bc$ est non nul.

Voir « TD2-Calculs Systeme lineaire-2x2 inversibilite » et la caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs du plan étudiée au lycée.

7. Montrer que toute matrice symétrique réelle d'ordre 2 est semblable à une matrice diagonale. *Indication : Dans le cas d'une matrice non diagonale, on pourra chercher les valeurs propres de l'endomorphisme canoniquement associée*.

On pose $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ et on suppose que $b \neq 0$.

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $S - \lambda \mathrm{I}_2$ est égal à $(\lambda - a)(\lambda - d) - b^2$.

La fonction polynomiale du second degré $\lambda \mapsto (\lambda - a)(\lambda - d) - b^2$ tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ et elle est strictement négative sur le segment d'extrémités a et d ; donc, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet exactement deux racines $\lambda_1 < \lambda_2$ (qui sont hors du segment mentionné). Aussi, une résolution d'équation par calcul de discriminant donne le résultat.

On choisit alors dans $\mathbb{R}^2$ deux vecteurs propres $\boldsymbol{v}_1$ et $\boldsymbol{v}_2$ de S respectivement associés à λ_1 et λ_2.

Alors la matrice $P = [\boldsymbol{v}_1 \quad \boldsymbol{v}_2]$ est inversible car elle est de rang 2, et elle vérifie $SP = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

***

DEBUT ↖

walter.ngambou@ac-versailles.fr