21. Matrices et applications linéaires

Programme 29.

22. Intégration sur un segment

22.1 FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

1. Définition d'une subdivision d'un segment, du pas d'une telle subdivision, d'une subdivision régulière.

2. Rappel : définition d'une fonction continue.

3. Définition d'une fonction continue par morceaux (f.c.p.m.) sur un segment donné à valeurs dans $\mathbb{K}$. Subdivision adaptée.

4. Stabilité : structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau (sous-algèbre).

5. Rappel : théorème des bornes atteintes.

6. Bornitude d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

7. Définition d'une fonction en escalier (constante par morceaux) sur un segment à valeurs dans $\mathbb{K}$.

8. Stabilité : structure de sous-espace vectoriel et de sous-anneau (sous-algèbre).

9. Sous-espace vectoriel engendré par les indicatrices des segments de $[a, b]$.

10. Rappel : définition d'une fonction uniformément continue. Exemple des fonctions lipschitziennes.

11. Rappel : théorème de Heine pour la continuité uniforme d'une fonction scalaire définie et continue sur un segment.

12. Approximation uniforme de toute fonction continue par morceaux sur un segment donné, par des fonctions en escalier sur ce segment.

22.2 DÉF. DE L'INTÉGRALE D'UNE F.C.P.M. SUR UN SEGMENT

13. (Voir DM18) Il existe exactement une forme linéaire $\mathcal{S} : \mathcal{CM}(([a, b], \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui à l'indicatrice sur $[a, b]$ de tout segment contenu dans $[a, b]$ attribue sa longueur et qui vérifie $|\mathcal{S}(f)| \leqslant (b-a) \sup |f|$ pour tout $f \in \mathcal{CM}(([a, b], \mathbb{K})$.

14. Pour tout segment J de la droite réelle non réduit à une point, on appelle intégration sur le segment $[a, b]$ des fonctions complexes continues par morceaux sur $[a, b]$ l'unique opérateur $\int_J : \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C}) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int_J f$, qui à l'indicatrice sur $[a, b]$ de tout segment contenu dans $[a, b]$ attribue sa longueur et qui vérifie $\left|\int_J f\right| \leqslant (b-a) \sup |f|$ pour tout $f \in \mathcal{CM}(([a, b], \mathbb{C})$.

22.3 PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE D'UNE F.C.P.M.

15. Relation de Chasles : relation simple et relation variationnelle.

16. Intégrale d'une fonction réelle. Partie réelle et partie imaginaire de l'intégrale.

17. Positivité et croissance de l'intégrale.

18. Inégalité triangulaire intégrale :

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \ .$$

19. Approximation de l'intégrale par les méthodes des rectangles, à gauche ou à droite : sommes de Riemann relativement à une subdivision régulière. Démonstration pour f lipschitzienne avec estimation de l'erreur. Interprétation géométrique.

20. (HP) Méthode des trapèzes.

21. Régularité de l'intégrale à une borne variable d'une f.c.p.m. sur un segment.

22.4 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

22. Fonction continue positive d'intégrale nulle sur un segment.

23. Premier lien entre intégration et dérivation : intégration d'une fonction continue suivi de la dérivation d'une fonction continûment dérivable :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x) \ .$$

24. Rappel : fonction dérivable de dérivée nulle sur un intervalle.

25. Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Lien entre intégration et primitivation :

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t = [F(t)]_{x_0}^{x} \ .$$

26. Second lien entre dérivation et intégration : dérivation d'une fonction continûment dérivable suivi de l'intégration d'une fonction continue :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t \ .$$

27. (Exo) Encore valable pour une fonction continûment dérivable par morceaux qui coïncide, sur chaque intervalle ouvert défini par une certaine subdivision, avec au moins une fonction continûment dérivable sur le fermé.

28. Retour sur la formule d'intégration par parties :

$$\int_x^y u'v + \int_x^y uv' = [uv]_x^y \ .$$

29. Retour sur la formule de changement de variables :

$$\int_x^y (F' \circ \varphi)\varphi' = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(y)} F' \ .$$

22.5 INTÉGRALE ET TRANSFORMATION DU GRAPHE DE LA FONCTION

30. Rappel : Intégrale d'une fonction paire sur un segment centré en 0.

31. Rappel : Intégrale d'une fonction impaire sur un segment centré en 0.

32. Rappel : Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période.

33. Définition de la valeur moyenne d'une f.c.p.m. sur un segment.

34. Rappel : théorème des valeurs intermédiaires.

35. Définition de la valeur moyenne d'une fonction c.p.m. sur un segment.

36. La valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment est atteinte par la fonction.

37. (Exo) première formule de la moyenne. Soit $f, p \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ avec f continue et p positive d'intégrale non nulle. Alors on peut trouver quelque $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fp = f(c)\int_a^b p \ .$$

38. (Exo) deuxième formule de la moyenne. Soit $f, p \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ avec p positive et décroissante. On suppose que f est continue et p continûment dérivable. Alors on peut trouver quelque $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b fp = \left(\int_a^c f\right)p(a) \ .$$

39. (Exo*) La propriété 38. est encore vraie si on ne suppose pas f continue et p continûment dérivable. *Indication : commencer par supposer p en escalier.*

22.6 FORMULES GLOBALES DE TAYLOR

40. Formule de Taylor avec reste intégrale pour une fonction $(n+1)$-fois continûment dérivable.

41. Retour sur l'inégalité des accroissements finis.

42. Lemme d'estimation intégrale :

$$\left|\int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!}\varphi(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{\mathrm{seg}(x_0,x)}|\varphi| \ .$$

43. Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction $(n+1)$-fois continûment dérivable.

44. Exemple d'intégration d'une relation de comparaison locale : retour sur la primitivation d'un développement limité.

45. Retour sur la formule locale de Taylor-Young pour une fonction m-fois continûment dérivable.

EXEMPLES DE QUESTIONS DE COURS

1. Formule de changement de bases pour les applications linéaires.

2. Représentation d'une application linéaire de rang r par la matrice $J_{n,p,r} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

3. Interprétation géométrique de l'équivalence entre deux matrices, carrées ou non.

4. Classification des matrices équivalentes par le rang.

5. Toute matrice de rang r admet une sous-matrice carrée inversible d'ordre r.

6. Trace d'un projecteur en dimension finie.

7. Toute fonction continue sur un segment donné peut-être approchée uniformément par au moins une fonction en escalier (avec une erreur uniformément aussi petite que souhaitée).

8. Sommes de Riemann. Démonstration pour f lipschitzienne avec estimation de la vitesse de convergence.

9. Fonction continue positive d'intégrale nulle sur un segment.

10. Premier lien entre intégration et dérivation : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right) = f(x)$.

11. Formule d'intégration par parties et relation de récurrence vérifiée par la suite $n \mapsto \displaystyle\int_\alpha^x \frac{1}{((t-\alpha)^2+\beta^2)^n}\mathrm{d}t$; où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

12. Formule de changement de variables et calcul de $\displaystyle\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$.

13. Formule de Taylor avec reste intégrale pour une fonction $(n+1)$-fois continûment dérivable.

14. Formule locale de Taylor-Young pour une fonction m-fois continûment dérivable.