23.1 Groupe symétrique, groupe alterné (rappel)

1. Toute permutation d'un ensemble fini non vide s'exprime comme le produit d'au moins une liste de transpositions.

2. Action définie par

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n-1)}, x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

Relations $\mathrm{id} \cdot X = X$ et $\sigma_2 \cdot (\sigma_1 \cdot X) = \sigma_2\sigma_1 \cdot X$

3. Action définie par

$$f \cdot \sigma(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = f\Big(\sigma \cdot (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)\Big).$$

Relations $f \cdot \mathrm{id} = f$ et $(f \cdot \sigma_1) \cdot \sigma_2 = f \cdot \sigma_1\sigma_2$.

4. La signature **sur les permutations** d'un ensemble fini non vide E est définie comme étant l'unique homomorphisme de $(\mathcal{S}_E, \circ)$ dans $(\{-1\ ;\ +1\}, \times)$ qui à toute transposition attribue la valeur -1.

5. Le n-ième groupe alterné, des permutations dites paires, noté $\mathcal{A}_n$, est défini comme étant le noyau de la signature sur le groupe symétrique $(\mathcal{S}_n, \circ)$.

6. (Exo) Soit $n \in [\![2, \infty[\![$. Soit $s \in \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{A}_n$. Montrer que $\mathcal{S}_n = \mathcal{A}_n \sqcup \mathcal{A}_n s$ et $\mathcal{A}_n s = s\mathcal{A}_n$. Généraliser à tout système de représentants des fibres au dessus d'un homomorphisme de groupes.

7. La fonction $f \in \mathcal{F}(E^n, \mathbb{C})$ est dite antisymétrique si, et seulement si, $f \cdot \tau = -f$ pour toute transposition $\tau \in \mathcal{S}_n$.

8. Si $f \in \mathcal{F}(E^n, \mathbb{C})$ est antisymétrique, alors $f \cdot \sigma = \varepsilon(\sigma) f$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

23.2 Formes bilinéaires alternées

9. Définition d'une forme bilinéaire sur un $\mathbb{K}$-e.v.
En exemple : $\mathbb{K}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto y = x_1 \times x_2 \in \mathbb{K}$.

10. (Exo) Engendrement : $E^2 \to \mathbb{K}, (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \mapsto f(u(\boldsymbol{x}_1), u_2(\boldsymbol{x}_2))$ est bilinéaire si $u_1, u_2 : E \to F$ sont linéaires et si $f : F^2 \to \mathbb{K}$ est bilinéaire.

11. Stabilité : $\mathcal{L}_2(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{F}(E^2, \mathbb{K})$.

12. Définition d'une forme bilinéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-e.v.

13. (Exo) Image, par une forme bilinéaire alternée, d'un couple lié.

14. Toute forme bilinéaire alternée est antisymétrique. Et la réciproque est vraie car $1_{\mathbb{K}}$ n'est pas son propre opposé.

15. (Exo) Si f est bilinéaire alors $f - f \cdot \tau$, où $\tau := (1\ \ 2)$, est bilinéaire alternée.

16. (Exo) Décrire toutes les formes bilinéaires alternées sur un plan vectoriel réel donné. Interprétation géométrique.

23.3 Formes multilinéaires alternées

17. Définition d'une forme n-linéaire sur un $\mathbb{K}$-e.v.
En exemple : $\mathbb{K}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto y = x_1 \times \cdots \times x_n \in \mathbb{K}$.

18. (Exo) Engendrement : $E^n \to \mathbb{K}, (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n) \mapsto f(u(\boldsymbol{x}_1), \dots, u_n(\boldsymbol{x}_n))$ est n-linéaire si $u_1, \dots, u_n : E \to F$ sont linéaires et si $f : F^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire.

19. Stabilité : $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ est un sous-espace du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{F}(E^n, \mathbb{K})$.

20. Définition d'une forme n-linéaire alternée sur un $\mathbb{K}$-e.v.

21. Stabilité : $\Lambda_n^*(E)$ est un sous-espace du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$.

22. Image, par une forme n-linéaire alternée, d'une n-liste liée.

23. Antisymétrie des formes multilinéaires alternées.

24. (Exo) Décrire toutes les formes trilinéaires alternées sur un espace vectoriel réel donné de dimension 3. Interprétation géométrique.

25. Lemme d'engendrement d'une forme n-linéaire alternée à partir d'une forme n-linéaire.

26. La droite vectorielle des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n.

23.4 Déterminant vectoriel

27. Définition de l'opérateur déterminant dans une base $\mathscr{B}$ sur les n-listes de vecteurs, ordonnés d'un premier à un n-ième et dernier, comme étant l'unique forme n-linéaire alternée qui attribue à la base $\mathscr{B}$ la valeur 1.

28. Étant donné une base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$, toute forme n-linéaire alternée s'exprime comme le produit du déterminant dans la base $\mathscr{B}$ par un scalaire.

29. Expression du scalaire déterminant d'une liste de vecteurs dans une base en fonction des coordonnées dans cette même base.

30. (Exo*) Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. muni d'une base $\mathscr{B} = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$. Pour tout $I \in \mathscr{P}\big([\![1, n]\!]\big)$, on pose $\mathscr{B}_I = (\boldsymbol{b}_i)_{i \in I}$ et p_I la projection linéaire sur $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_I)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_{\overline{I}})$. Montrer que les applications $\big(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p\big) \mapsto \det_{\mathscr{B}_I}\big(p_I(\boldsymbol{x}_1), \dots, p_I(\boldsymbol{x}_p)\big)$, pour $I \in \mathscr{P}_p\big([\![1, n]\!]\big)$, constituent une base de l'espace des formes p-linéaires alternées sur un E.

31. Comparaison des déterminants dans deux bases finies.

32. Caractérisation, en termes de déterminants, des n-listes liées parmi les n-listes d'un espace de dimension n. Idem pour les n-listes libres et les bases.

23.5 Déterminant opérationnel

33. Effet d'un endomorphisme sur le déterminant d'une liste de vecteurs dans une base quelconque.

34. Définition du déterminant d'un endomorphisme, indépendamment de toute base.

35. Déterminant d'une composée.

36. Caractérisation, en termes déterminants, des automorphismes (endomorphismes inversibles) parmi les endomorphismes.

37. Homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$ induit par le déterminant.

23.6 Déterminant matriciel

38. Définition du déterminant d'une matrice carrée comme étant le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé.

39. Déterminant dans la base canonique de la liste des colonnes.

40. Caractérisation du déterminant matriciel par rapport aux colonnes.

41. Expression du déterminant matriciel en fonction des coefficients canoniques.

42. (*Comme pour le rang*). Lien entre déterminant vectoriel et déterminant matriciel : le déterminant dans la base $\mathscr{B}$ d'une liste de vecteurs est égal au déterminant de la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de cette liste.

43. (*Comme pour le rang*). Lien entre déterminant opérationnel et déterminant matriciel : le déterminant d'un endomorphisme est égal au déterminant de sa matrice dans la base $\mathscr{B}$, arbitrairement choisie.

44. Déterminant matriciel d'un produit. Effet de la multiplication par une matrice scalaire.

45. Caractérisation, à l'aide du déterminant, des matrices inversibles (endomorphismes inversibles) parmi les matrices carrées d'ordre n.

46. Homomorphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ induit par le déterminant matriciel.

47. Déterminant de la transposée.

48. Caractérisation du déterminant matriciel par rapport aux lignes.

49. (Exo*) En reprenant les notations de l'exercice 30., montrer que toute p-liste $\big(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p\big)$ est liée si, et seulement si, $\det_{\mathscr{B}_I}\big(p_I(\boldsymbol{x}_1), \dots, p_I(\boldsymbol{x}_p)\big) = 0$ pour tout $I \in \mathscr{P}_p\big([\![1, n]\!]\big)$.

23.7 Calcul de déterminants

50. Effet des opérations élémentaires.

51. Définition des cofacteurs d'une matrice carrée A. Notation $\Delta_{i,j}(A)$.

52. Développement par rapport à une ligne ou une colonne.

53. Déterminant d'une matrice triangulaire.

54. (Exo) Déterminant d'une matrice carrée triangulaire par blocs

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} A & 0 \\ C & D \end{vmatrix}$$

55. Déterminant de Vandermonde. Lien avec les polynômes de Lagrange.

56. (Exo) Soit $n \in [\![2, \infty[\![$; $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n ; $E := \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $f_P : E \to E$ qui à tout polynôme Q attribue le reste de la division euclidienne de XQ par P. Montrer que $f_P \in \mathscr{L}(E)$ et calculer $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f_P)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

23.8 Déterminant matriciel et inversion

57. Définition de la comatrice d'une matrice carrée. Notation $\mathrm{Com}(A)$.

58. (Exo) Lemme préparatoire : système linéaire carré et déterminant.

59. Relations entre toute matrice carrée, sa comatrice et son déterminant.

60. Expression (universelle) de l'inverse d'une matrice inversible.

walter.ngambou@ac-versailles.fr