### 24.1 Série numérique convergente, divergente

**1.** Définition de la série associée à une suite numérique. Suite des sommes partielles. Notation $\sum_n u_n$ (lire « série de terme générale $u_n$ »).

**2.** Définition de la convergence, divergence, d'une série.

**3.** Somme et suite des restes d'une série convergente. Notation $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$

**4.** Linéarité de la somme.

**5.** Condition nécessaire (et non suffisante) de convergence d'une série portant sur le terme général.

**6.** Définition de la divergence grossière d'une série.

**7.** Transposition de l'étude d'une suite numérique à celle d'une série numérique.

**8.** (Exo) Transformer la tâche « montrer que $\left(\dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right)_n$ converge dans $\mathbb{R}_+^*$ ».

**9.** Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série géométrique portant sur son paramètre.

**10.** Somme et restes d'une série géométrique convergente.

**11.** Comparaison asymptotique : suite géométrique et suite des factorielles.

**12.** Expression de l'exponentielle d'un complexe comme somme d'une série.

### 24.2 Série à termes (réels) positifs

**13.** Lien entre la convergence d'une série à termes réels positifs et la majoration de sa suite des sommes partielles (par une constante).

**14.** (Exo) Montrer que $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

**15.** (Exo) Soit $(c_k)_{k\geqslant 1} \in [\![0, 10[\![^{\mathbb{N}^*}$, qui ne stationne pas à la valeur 9. Montrer que $\sum c_k 10^{-k}$ converge et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{p} c_k 10^{-k}$ est l'approximation décimale par défaut de la somme à la précision $10^{-p}$.

**16.** Premier théorème de comparaison pour les séries positives. Couple de suite réelles positives dont la première est inférieure à la dernière.

**17.** (Exo) Montrer que $\sum_n \dfrac{1}{n^s}$ diverge pour $s \in ]-\infty, 1]$ et converge pour $s \in [2, +\infty[$ $\big($*On pourra introduire* $(1/((n-1)n))\big)$.

**18.** Deuxième théorème de comparaison pour les séries positives. Couple de suite réelles positives dont la première est dominée par la seconde.

**19.** Troisième théorème de comparaison pour les séries positives. Couple de suite réelles positives dont la première est équivalente à la seconde.

**20.** Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de Riemann portant sur son paramètre.

### 24.3 Comparaison série et intégrale

**21.** Technique de comparaison série-intégrale : pour $f$ monotone, encadrement des accroissements de la suite des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles.

**22.** Encadrement des sommes partielles d'une série de Riemann divergente. Encadrement des restes d'une série de Riemann convergente.

### 24.4 Convergence absolue, semi-convergence

**23.** Définition de la convergence absolue d'une série à termes complexes.

**24.** Lien entre la convergence et la convergence absolue.

**25.** Quatrième théorème de comparaison pour les séries positives. Couple de suites complexes dont la première est dominée par la seconde.

**26.** Définition de la semi-convergence d'une série à termes complexes.

**27.** Théorème des séries alternées. Encadrement des restes.

**28.** (Exo) Montrer que la suite $n \mapsto \displaystyle\int_{t=0}^{n\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge dans $\mathbb{R}$.

### 24.5 Somme d'une famille à termes dans $[0, +\infty]$

**29.** Définition des opérations et de la relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.

**30.** Définition de la borne supérieure dans $[0, +\infty]$ (d'une partie non vide).

**31.** Définition de la somme d'une famille à termes dans $[0, +\infty]$. Notation $\sum_{i\in I} u_i$.

**32.** Cas où $I$ est fini. Cas où $I = \mathbb{N}$. Extension de la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

**33.** Somme d'une famille à support fini.

**34.** Invariance de la somme par permutation.

### 24.6 Somme d'une famille sommable de réels positifs

**35.** Définition de la sommabilité d'une famille de réels positifs.

**36.** (Exo) Si $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$ est sommable, alors on peut exprimer son support $\{i \in I \mid u_i \neq 0\}$ comme la réunion d'une suite croissante de ses parties finies.

**37.** Stabilité : somme, multiplication par un réel positif.

**38.** Théorème de sommation par paquets (cas positif, *démonstration admise*).

**39.** Propriété corollaire dans le cas où l'ensemble $I$ d'indexation est un produit : théorème d'interversion de Fubini positif.

### 24.7 Somme d'une famille sommable de complexes

**40.** Définition de la sommabilité d'une famille de complexes. Notation $\ell^1(I)$.

**41.** Cas où $I$ est fini. Cas où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries).

**42.** Caractère sommable d'une sous-famille.

**43.** Stabilité : structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

**44.** Il existe exactement une forme linéaire $\ell^1(I) \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \mathcal{S}(u)$ qui à l'indicatrice sur $I$ de tout singleton attribue la valeur 1 et qui vérifie $|\mathcal{S}(u)| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$ pour tout $u \in \ell^1(I)$.

**45.** Définition de la sommation sur l'espace $\ell^1(I)$ des familles sommables de nombres complexes indexées par $I$

**46.** Si $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable et si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ alors il existe au moins une partie finie $F$ de $I$ telle que $\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \leqslant \varepsilon$ .

**47.** (Exo*) Pour tout $(u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I)$, pour tout $S \in \mathbb{C}$, $\sum_{i\in I} u_i = S$ si, et seulement si, quel que soit l'erreur $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe au moins une partie finie $F$ de $I$ telle que quelle que soit la partie finie $F'$ de $I$, $F' \supset F \implies \left|S - \sum_{i\in F'} u_i\right| \leqslant \varepsilon$ .

**48.** Espace engendré par les valeurs.

**49.** Positivité et croissance.

**50.** Théorème de sommation par paquets (cas complexe, *démonstration admise*).

**51.** Propriété corollaire dans le cas où l'ensemble $I$ d'indexation est un produit : théorème d'interversion de Fubini.

**52.** Propriété corollaire : produit de deux sommes de familles sommables.

**53.** Extension admise au produit d'un nombre fini de sommes de familles sommables.

**54.** Définition de la série produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

**55.** Convergence absolue du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Somme.

**56.** Retour sur l'homomorphisme : $(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \times)$, $z \mapsto e^z$.



walter.ngambou@ac-versailles.fr