25.1 Produit scalaire réel

1. Définition d'une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel. Exemples sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$, $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$.

2. Définition du caractère symétrique d'une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-e.v.

3. Quatre identités remarquables liant une forme bilinéaire symétrique et sa forme quadratique. Trois formules de polarisation associées.

4. Définition du caractère positif d'une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-e.v.

5. Inégalité de Cauchy-Schwarz portant sur les formes bilinéaires symétriques positives.

6. Définition du caractère défini d'une forme bilinéaire sur un $\mathbb{R}$-e.v.

7. Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-e.v.

8. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notation : $X^\top Y$, $\mathrm{tr}(A^\top B)$.

9. Exemples de produits scalaires intégraux sur $\mathbb{R}[X]$, $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

10. Retour sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz : cas d'égalité pour un produit scalaire.

11. Définition d'un espace euclidien, d'un espace préhilbertien réel.

25.2 Norme dans un espace préhilbertien réel

12. Définition d'une norme sur un espace vectoriel réel. Exemples sur $\mathbb{R}^2$ et boules unités.

13. Définition de la norme associée à un produit scalaire.

14. Ré-écriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire.

15. Inégalité triangulaire pour une norme associée à un produit scalaire. Cas d'égalité.

16. (Exo) $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$ est un espace préhilbertien réel. Si une application $f : E \to E$ préserve le produit scalaire alors elle est linéaire.

17. (Exo) $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$ est un espace préhilbertien réel. Si une application $f : E \to E$ est linéaire et si elle préserve l'orthogonalité alors elle préserve le produit scalaire.

18. Identité du parallélogramme vérifiée par la norme.

19. (Exo*) Pour qu'une norme soit associée à un produit scalaire, il est nécessaire et suffisant qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme.

25.3 Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel

20. Définition d'un couple de vecteurs orthogonaux, du sous-espace orthogonal d'un vecteur, du sous-espace orthogonal d'une partie.

21. Définition du caractère orthogonal, orthonormé, d'une famille de vecteurs.

22. Exemples de familles orthogonales, orthonormées, selon des produits scalaires intégraux.

23. Somme de deux sous-espaces orthogonaux.

24. (Exo) Somme d'un nombre fini de sous-espaces orthogonaux deux à deux.

25. Liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls.

26. Théorème de Pythagore portant sur le carré scalaire d'une somme.

25.4 Distance à un sous-espace

27. Définition d'une distance sur un ensemble quelconque non vide.

28. Distance sur un espace vectoriel réel, associée à une norme.

29. Inégalité triangulaire pour une distance associée à un produit scalaire. Cas d'égalité.

30. (Exo) $\big(E, (\cdot \mid \cdot)\big)$ est un espace préhilbertien réel. Si une application $f : E \to E$ préserve les distances, alors elle est affine : à savoir qu'on peut trouver au moins une application linéaire $a \in \mathscr{L}(E)$ et au moins un vecteur constant $\boldsymbol{b} \in E$ tels que $f(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in E$

31. Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide. Notation $d(x, A)$.

32. (Exo) Montrer que $E \ni x \mapsto d(x, A) \in \mathbb{R}_+$ vérifie $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

33. (Exo) Recherche de tout élément du sous-espace V qui réalise la distance à x.

25.5 Projection orthogonale sur un sous-espace

34. Unicité du supplémentaire orthogonal d'un sous-espace.

35. (Exo) Si la liste de vecteurs $(\boldsymbol{x}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre alors la matrice carrée $[(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j)]$ est inversible.

36. Le supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.

37. En dimension finie, dimension de l'orthogonal, vecteur normal à un hyperplan.

38. Définition de la projection orthogonale sur un sous-espace qui admet un supplémentaire orthogonal.

39. Lien entre distance à un sous-espace qui admet un supplémentaire orthogonal et projection orthogonale sur ce sous-espace.

40. En dimension finie, projection orthogonale d'un vecteur sur l'hyperplan orthogonal de $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}_E$, distance à cet hyperplan.

41. (Exo) La liste de vecteurs $(\boldsymbol{x}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ est de rang égal au rang de la matrice $[(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{x}_j)]$.

25.6 Bases orthonormées

42. Orthogonalisation, d'orthonormalisation d'une suite, finie ou infinie, de vecteurs linéairement indépendants.

43. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

44. (Exo) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Si l'application $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (X, Y) \mapsto X^\top SY \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire, alors il une unique matrice triangulaire supérieure T à éléments diagonaux strictement positifs telle que $S = T^\top T$.

45. Corollaire : Existence de bases orthonormées dans un espace euclidien.

46. Théorème de la base orthonormée incomplète.

47. Formes linéaires coordonnées, produit scalaire et norme dans une base orthonormée.

48. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur dans une base orthonormée du support.

walter.ngambou@ac-versailles.fr