

DM 01
à rendre le lundi 8 septembre
Durée conseillée : 2h

Rappel. Le DM doit comporter votre nom, votre prénom, le temps passé, l'aide reçue/le travail en groupe. Je me réserve le droit de ne pas corriger le DM si l'une de ces informations vient à manquer.

Faites très attention à la rédaction, et n'oubliez pas de DÉCLARER VOS VARIABLES !

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer proprement à chaque fois.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \quad (1)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \quad (2)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \quad (3)$$

$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \quad (4)$$

Exercice 2. Soit x un réel positif ou nul. Démontrer que $(\forall \varepsilon > 0, x \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
On démontrera la contraposée.

Exercice 3. *Décomposition de 1 comme somme d'inverses d'entiers.* On s'intéresse à la proposition suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n, \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1 \text{ et } a_1 < a_2 < \dots < a_n. \quad (\mathcal{P}_n)$$

1. Pourquoi le résultat est-il évident sans l'hypothèse « $a_1 < \dots < a_n$ » ?
2. Étudier $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.
3. Démontrer que pour tout $n \geq 3$, \mathcal{P}_n est vraie.
4. Démontrer que pour $n = 3$, il y a unicité d'une telle écriture. Y a-t-il unicité pour $n = 4$?