MPSI 1

Mathématiques DS 10

Vendredi 17 mai – 8h-11h

- Durée : 3 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un problème.
- Prenez **10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fautive, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage! ♪

Notations On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On note $\mathcal{M}_{n,p}$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients réels.

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et u est un endomorphisme de E . Si $\mathcal{B}$ est une base de E , on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice représentant u dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

On rappelle que l'on peut noter une matrice « par blocs », $A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array} \right)$, où B et D ont le même nombre de colonnes, C et E ont le même nombre de colonnes, B et C le même nombre de lignes, D et E le même nombre de lignes. En particulier, il est courant de représenter une matrice sous la forme $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline C & B \end{array} \right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}$, $B \in \mathcal{M}_{n-1}$. Pour améliorer la lisibilité, toute écriture par blocs de matrice sera faite avec ces deux traits, vertical et horizontal.

On dit que u est une homothétie s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \text{Id}_E$.

On appelle projecteur un endomorphisme p de E idempotent, c'est-à-dire que $p^2 = p$.

A. Questions préliminaires

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n$, on appelle trace de A le nombre réel $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n$. Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
2. Montrer que la trace de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.

On appelle trace de u , notée $\text{Tr}(u)$, la valeur commune des traces des matrices représentant u . On dit que la trace est un invariant de similitude.

Soit p un projecteur de E .

3. Démontrer que $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.
4. En déduire que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$.

On pose $q = \text{Id}_E - p$.

5. Démontrer que $\text{Im}(q) = \ker(p)$ et que $\text{Im}(p) = \ker(q)$.
6. Démontrer que la dimension de la somme de deux sous-espaces F et G de E est inférieure ou égale à la somme de leurs dimensions.
7. Montrer que si $p_1, \dots, p_m$ sont m projecteurs et si $s = p_1 + \dots + p_m$, alors $\text{Tr}(s) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(s) \geq \text{rg}(s)$.

8. *Un calcul par blocs.* Soit $P \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$. Démontrer que la matrice $Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & P \end{array} \right)$ a pour inverse la matrice $\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0_{1,n-1} \\ \hline 0_{n-1,1} & P^{-1} \end{array} \right)$ et calculer, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}$,

$$Q \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline C & B \end{array} \right) Q^{-1}.$$

B. Projecteurs de rang 1

On suppose dans cette partie que le rang du projecteur p est égal à 1.

Soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.

9. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $p \circ u \circ p = \lambda p$ et que dans la base $\mathcal{C}$ la matrice représentant u s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline C & B \end{array} \right), \quad (1)$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}$ et $B \in \mathcal{M}_{n-1}$.

10. Montrer que si $q \circ u \circ q$ n'est pas proportionnel à q , alors la matrice B définie en (1) n'est pas la matrice d'une homothétie. On rappelle que $q = \text{Id}_E - p$.

C. Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que u n'est pas une homothétie.

11. Démontrer qu'il existe un vecteur x de E tel que x et $u(x)$ ne soient pas liés (c'est-à-dire ne soient pas colinéaires).
12. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans laquelle la matrice de u est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & B \end{array} \right) \text{ où } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}, L \in \mathcal{M}_{1,n-1} \text{ et } B \in \mathcal{M}_{n-1}.$$

Remarque : le L , le C et le B de cette question n'ont aucune raison d'être les mêmes que le L , le C et le B de la question 9.

13. En déduire que si $\text{Tr}(u) = 0$, il existe une base $\mathcal{B}'$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ ait une diagonale nulle.

On ne suppose plus $\text{Tr}(u) = 0$. Soit $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n t_i$.

14. Dans le cas où $n = 2$, démontrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \begin{pmatrix} t_1 & \alpha \\ \beta & t_2 \end{pmatrix}$ où α et β sont des réels.

On admettra la propriété suivante : en dimension $n \geq 3$, si $t \in \mathbb{R}$, il existe un projecteur φ de E de rang 1 tel que d'une part $\varphi \circ u \circ \varphi = t\varphi$ et d'autre part $\psi \circ u \circ \psi$ ne soit pas proportionnel à ψ , en notant $\psi = \text{Id}_E - \varphi$.

15. En dimension $n \geq 3$, à l'aide des questions 9. et 10., démontrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ dans laquelle la matrice représentant u s'écrit

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} t_1 & L \\ \hline C & B \end{array} \right),$$

où $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}$, $C \in \mathcal{M}_{n-1,1}$ (pas forcément les mêmes L et C que dans les questions précédentes!) et $B \in \mathcal{M}_{n-1}$ n'est pas une homothétie.

16. En dimension $n \geq 3$, démontrer par récurrence qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}''}(u)$ ait pour éléments diagonaux $(t_1, \dots, t_n)$.

D. Décomposition en somme de projecteurs

On suppose désormais que u est un endomorphisme de E vérifiant $\text{Tr}(u) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(u) \geq \text{rg}(u)$. On pose $r = \text{rg}(u)$ et $\theta = \text{Tr}(u)$.

17. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} T_1 & 0_{r,n-r} \\ \hline T_2 & 0_{n-r,n-r} \end{array} \right), \text{ où } T_1 \in \mathcal{M}_r \text{ et } T_2 \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}.$$

Supposons tout d'abord que T_1 ne soit pas la matrice d'une homothétie.

18. À l'aide de la question 16., montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0_{r,n-r} \\ \hline A_2 & 0_{n-r,n-r} \end{array} \right), \text{ où } A_1 = \begin{pmatrix} t_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (*) & & t_r \end{pmatrix} \text{ et } (t_1, \dots, t_r) \in (\mathbb{N}^*)^r.$$

19. En déduire que u est la somme d'un nombre fini de projecteurs.

On suppose maintenant que T_1 est la matrice d'une homothétie.

20. Démontrer que là encore, u est la somme d'un nombre fini de projecteurs.