

Numéro d'inscription

Nom

Prénom

Épreuve

Signature

CONCOURS CENTRALE • SUPÉLEC

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feuille

0	1	/	0	3
---	---	---	---	---

DS 10 - Things PC 2014
(reformulaire en mieux)

A- Questions préliminaires.

1. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Also

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^n [AB]_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{ki} \\ &= \sum_{i=1}^n [BA]_{ii} = \text{Tr}(BA) \end{aligned}$$

2. Äquivalenz B oder B' den basis d. E .

Also $\text{Rat}_S(u)$ or $\text{Rat}_{S'}(u)$ ist sensitiv:

$$\Delta' \quad P = \text{Flat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'), \text{ on a}$$

$$\text{Nat}_{\mathcal{B}}(u) = \tilde{P}^{-1} \text{Nat}_{\mathcal{B}}(u) P$$

Done

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{Nat}_B(u)) &= \text{Tr}(P^{-1}(\text{Nat}_B(u))P) \\ &= \text{Tr}(PP^{-1} \text{Nat}_B(u)) \\ &= \underline{\text{Tr}(\text{Nat}_B(u))}, = \end{aligned}$$

Donc $\text{Tr}(\text{Mat}_B(u))$ ne dépend pas du choix de
la base B .

Ne rien écrire

dans la partie barrée

3. On procède par analyse-synthèse.
Soit $x \in E$.

Analyse: On suppose que $x = y + z$,
où $y \in \text{Im}(p)$ et $z \in \text{Ker}(p)$.

Alors on dispose de $\alpha \in E$ tel que $y = p(\alpha)$

~~Donc $y = p(\alpha)$~~

Donc $x = p(\alpha) + z$

D'où $p(x) = p(p(\alpha) + z) = p^2(\alpha) = p(\alpha) = y$

Donc $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$

D'où l'unicité de la décomposition.

Synthèse: Posons $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$.

Alors $x = y + z$

$y \in \text{Im}(p)$

$p(z) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0 \in$

donc $z \in \text{Ker}(p)$

D'où l'existence de la décomposition et la
supplémentarité.

4. Notons $r = \text{rg}(p)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base
de $\text{Im}(p)$ et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(p)$.
Par 3, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .
Notons-la $\mathcal{B}$

Alors $\text{Rat}_S(p) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

$\xleftrightarrow{r}$

Donc $\text{Tr}(p) = r = \text{rg}(p)$

5. Déjà, par l'analyse-synthèse précédente (ou par le cours) on remarque que

$\forall x \in E, x \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x.$

Ainsi, si $x \in E$, on a les équivalences.

$x \in \text{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$
 $\Leftrightarrow (\text{Id}_E - p)(x) = 0_E$
 $\Leftrightarrow \underline{x \in \ker(q)}$

Comme $q \circ q = (p - \text{Id}_E) \circ (p - \text{Id}_E) = p^2 - 2p + \text{Id}_E = \text{Id}_E - p = q$,

on en déduit que q est un projecteur

Ainsi, $x \in \text{Im}(q) \Leftrightarrow x \in \ker(\text{Id}_E - q) = \ker(p)$

6. Par la formule de Grassmann,
 $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
 $\leq \underline{\dim(F) + \dim(G)}$

7. ⓐ Déjà, par linéarité de la trace,

$\text{Tr}(s) = \sum_{i=1}^m \text{Tr}(p_i) = \sum_{i=1}^m \text{rg}(p_i) \in \mathbb{N}$

ⓑ Ensuite, si $x \in \text{Im}(s)$, alors on dispose de $w \in E$ tel que

~~$s(x) = \sum p_i(w)$~~

$x = s(w) = \sum_{i=1}^m p_i(w)$, donc $x \in \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$.

On en déduit que

$$\underline{I_n(s) \subset \sum_{i=1}^m I_n(p_i)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{rg}(s) &\leq \dim\left(\sum_{i=1}^m I_n(p_i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \dim(I_n(p_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \text{rg}(p_i) = \underline{\text{Tr}(s)} \end{aligned}$$

D'où le résultat voulu.

8.20. calculer déjà

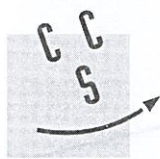
$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & PP^{-1} \end{array}\right) = I_n$$

Donc Q est inversible d'inverse

$$\underline{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right)}$$

Ensuite

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} A & L \\ C & B \end{pmatrix} Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & L \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & L \\ PC & PB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \underline{\underline{\begin{pmatrix} A & LP^{-1} \\ PC & PBP^{-1} \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$



Numéro de place

--	--	--	--	--	--

Numéro d'inscription

--	--	--	--	--

Signature

Signature _____

Nom

L	A	i	L	L	E	T
---	---	---	---	---	---	---

Prénom

N	i	C	O	L	A	S
---	---	---	---	---	---	---

Épreuve

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Feville

0	2	/	0	3
---	---	---	---	---

B-Projecteurs de rang 1.

g On va raisonner matriciellement.

De jà, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & 0_{n-1} \end{array} \right)$ car $\text{rg}(p) = 1$.

Ensuite, s. o. écrit, per blocs,

$$\text{Mat}_E(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline C & B \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow 1 \\ \uparrow n-1 \end{array}$$

along

$$\text{Mat}_B(\text{proj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \text{Mat}_3(p)$$

$$D_{\alpha} \vdash p \circ \alpha \circ p = \alpha p$$

10. On raisonne par contraposition.

S: Bor la matrice d'une homothétie,

Definiere $B = \alpha I_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

C
TSLV

Ne rien écrire

dans la partie barrée

alors

$$\text{Mat}_E(q \circ u \circ q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ c & & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

(c.e. effd, $\text{Mat}_E(q) = I_n - \text{Mat}_E(p)$.)

$$\text{Donc } \text{Mat}_E(q \circ u \circ q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & \alpha I_{n-1} & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n-1} & & \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_E(q \circ u \circ q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha I_{n-1} & & \end{pmatrix} = \alpha \text{Mat}_E(q)$$

Donc $q \circ u \circ q = \alpha q$, i.e. $q \circ u \circ q$ est proportionnel à q .

D'où le résultat par contraposée.

C. Endomorphismes différentiels d'une homothétie.

11. ~~(C'est l'exo de cours refait en M).~~

~~Par contraposée, on suppose~~

~~On peut faire la preuve du cours (je ne l'écris pas, c'est) on raisonne matriciellement.~~

~~Soit B une base de E . On raisonne par~~

11. C'est l'exo de cours qu'on a rappelé. Je propose une autre soln, matricielle.

Soit B une base de E .

① Si $\text{Mat}_B(u)$ n'est pas diagonale, alors on dispose de $i \neq j$ tq $[\text{Mat}_B(u)]_{ij} \neq 0$.

A on note $B = (e_1, \dots, e_n)$, cela signifie que $u(e_j)$ a une composante non nulle sur e_i , donc (comme (e_i, e_j) est libre) $u(e_j)$ n'est pas colinéaire à e_j .

② Si $\text{Mat}_B(u)$ est diagonale, comme on l'est par une homothétie, $\text{Mat}_B(u)$ n'est pas un multiple de Id .

Donc on dispose de $i \neq j$ tels que $[\text{Mat}_B(u)]_{ii} \neq [\text{Mat}_B(u)]_{jj}$. Notons d_i et d_j ces valeurs. On a donc, avec les notations ci-dessus, $u(e_i) = d_i e_i$ et $u(e_j) = d_j e_j$.

Donc $u(e_i + e_j) = d_i e_i + d_j e_j$.

Si on avait $u(e_i + e_j) = \alpha(e_i + e_j)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, par liberté on aurait $\alpha = d_i$ et $\alpha = d_j$, absurde.

Donc $u(e_i + e_j)$ n'est pas colinéaire à $e_i + e_j$.

12. Soit x tq $(x, u(x))$ soit libre (un tel x existe par la question précédente).

On complète cette famille libre en une base B . Alors

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline 1 & B \\ 0 & \end{array} \right).$$

13. ~~Procédons par récurrence sur~~

13. Démontrons plutôt le résultat suivant (équivalent):
toute matrice de trace nulle est semblable
à une matrice de diagonale nulle.

O. démontre le résultat par récurrence sur
la taille n de la matrice.

Initialisation:

Soit $A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $\text{Tr}(A) = 0$.

Alors $A = 0$, de diagonale nulle.

Hérédité:

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq la proposition soit vraie.

Alors, si $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

→ ou bien A est une longuelette donc $A = 0_{n+1}$,
et le résultat est prouvé.

→ ou bien ça n'est pas le cas et, si
 f est l'endomorphisme canoniquement associé à
 A , par la qu. 12, on dispose de $\mathcal{B}$ base tq

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix}. \text{ Cette matrice est}$$

donc semblable à A .

Mais $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ donc par hypothèse de
récurrence, on dispose de $P \in GL_p(\mathbb{R})$ tq PBP^{-1}
soit à diagonale nulle.

$$\text{Mais, on pose } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix},$$

$$Q \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L & 0 \\ PC & PBP^{-1} \end{pmatrix}, \text{ de } \underline{\text{diagonale nulle}}.$$



--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--

Signature _____

[illegible][illegible]

Épreuve

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Feuille

0	3	/	0	3
---	---	---	---	---

Ne rien porter sur cette feuille avant d'avoir complètement rempli l'entête

Donc A est semblable à une matrice de diagonale nulle: l'hérédité et le résultat sont démontrés

14. Power, $v = u - t_1 \text{Id}_E$.

u n'est pas une honnêteté, donc v non plus.
 Pour la question 12, on dispose d'une base
 B dans laquelle

$$\text{Mat}_3(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{or } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

2.

$$\text{Nat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} \\ = \underline{\underline{\begin{pmatrix} t_1 & a \\ b & c+t_1 \end{pmatrix}}}$$

Then $t_1 + c + t_1 = \tau(u) = t_1 + t_2$ hence $c + t_1 = t_2$

D. $\text{Nat}_B(u) = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ b & t_2 \end{pmatrix}$

15. Appliquons la proposition admise avec $t=t_1$.
On dispose alors de φ projection de rang 1
tel que $\varphi \circ \varphi = t_1 \varphi$ et $\varphi \circ \varphi$ ne
soit pas proportionnel à φ .

Par 9, dans une base $\mathcal{B}$ adaptée : $\text{Im}(\varphi) \oplus \text{Ker}(\varphi) = E$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} t_1 & L \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par 10, $\mathcal{B}$ n'est pas une base orthogonale.

16. De même qu'en 13, faisons plutôt une
preuve de l'équivalence matricielle de ce résultat.

Montrons $\mathcal{H}_n$: si $A \in \mathcal{O}_n^*$ et $\text{Tr}(A) = t_1 + \dots + t_n$,
il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \text{Vec}(I_n)$
 $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$.

Initialisation: $n=1$ et 2 ont été faits

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}_n$.

Soit $A \in \mathcal{O}_{n+1}$, $(t_1, \dots, t_{n+1}) \hookrightarrow A \in \text{Vec}(I_{n+1})$

$$\text{Tr}(A) = t_1 + \dots + t_{n+1}.$$

Par 15, A est semblable à $\begin{pmatrix} t_1 & L \\ 0 & B \end{pmatrix}$

où $B \in \text{Vec}(I_n)$.

Par H.R., $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} t_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t_n \end{pmatrix}$

Car $\text{Tr}(A) = t_1 + \text{Tr}(B)$

Donc, en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & P & \end{pmatrix}$,

~~$Q^{-1}AQ$~~

$$Q \cdot \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & L & \\ c & & B \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix},$$

matrice qui est donc semblable à A .

D'où l'hérédité et le résultat!

D - Décomposition en somme de projecteurs:

17. Soit $r = \text{rg}(u)$, S un supplémentaire de $\ker(u)$ dans E , $(e_1, \dots, e_r)$ une base de S et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$.

Alors $B = (e_1, \dots, e_r, \dots, e_n)$ est une base de E .
Dans cette base,

$$\text{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} (*) & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

d'où le résultat désiré.

18. Par la question 16, on dispose de $P \in GL_n(\mathbb{R})$
t

$$P T_1 P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ & 0 & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Car $\text{Tr}(T_1) = \text{Tr}(u) = 0$ et $0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{r-1 \text{ fois}} + 0 + \dots + 0$

Donc, en posant $Q = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$,

Q est inversible, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ et

$$\alpha \times \text{Mat}_B(u) \times \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} P T_1 P^{-1} & 0 \\ T_2 P^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

D'où le résultat en posant $A_1 = P T_1 P^{-1}$
 (et, encore une fois, parce que deux matrices sont semblables si elles représentent le même endomorphisme)
 $A_2 = T_2 P^{-1}$

19. Notons $\Pi = \text{Mat}_B(u)$. $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes.
 Alors si $P_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & i C_i & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, pour $1 \leq i \leq r-1$,

Comme $(C_i)_{i=1}^{r-1}$, $P_i^2 = P_i$, donc P_i est une matrice de projection.

Reste la r -ième colonne de Π (le reste est nul).

On écrit $C_r = \sum_{i=1}^{0-r+1} \frac{1}{0-r+1} C_n$ et

$$\text{on pose } P_r = \frac{1}{0-r+1} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & Q & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

qui possède un coefficient (r,r) égal à 1 et qui, en faisant le calcul, vérifie $P_r^2 = P_r$.

$$\text{Ainsi, } \Pi = \sum_{i=1}^{r-1} P_i + (0-r+1) P_r,$$

Π est une somme de matrices de projection,
donc c'est une somme de projections.

20. Soit T_r une homothétie, $T_r = \frac{\theta}{r} I_r$.

→ Si $\theta = r$, $T = I_r$, a fait comme précédemment

→ Sinon, $\frac{\theta}{r} > 1$. On considère $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ T_2 & 0 \end{pmatrix}$ où T_1 n'est pas 1 homothétie.

On a toujours $\text{Tr}(T_1) > \text{rg}(T_1)$ car $\text{rg}(T_1) = \text{rg}(T) = r < \theta$
 i.e. $r \leq \frac{\theta}{r} = \text{Tr}(T_1)$. Plus de place mais 0 conclut par 19.