MPSI 1

Mathématiques
DS 09

Samedi 4 mai – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un petit exercice de cours/calculs et d'un problème de probabilités (avec un peu de matrices à la fin).
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
  Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Cours et calculs*.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en le justifiant, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.
2. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x^3-x^2+x-1}$.
3. Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donner une matrice de rang 1, une matrice de rang 2, une matrice de rang 3 chaque matrice ne contenant aucun coefficient nul. Justifier rapidement le rang de chaque matrice.
4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image de A, son rang, la dimension et une base de son noyau.

Problème 1. Marches aléatoires

A. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On modélise une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

- on travaille tout du long dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$;
- on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = +1) = \frac{1}{2}.$$
- On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

S_n correspond la position du « marcheur aléatoire » à l'instant n : à chaque instant il a une chance sur deux de faire un pas en avant, une chance sur deux de faire un pas en arrière. À ω fixé, on peut représenter graphiquement la réalisation d'une marche aléatoire comme l'ensemble des points $(n, S_n(\omega))$, que l'on relie afin de former une ligne brisée. On remarque qu'entre deux instants, $S_n(\omega)$ ne peut que augmenter de 1 ou diminuer de 1.

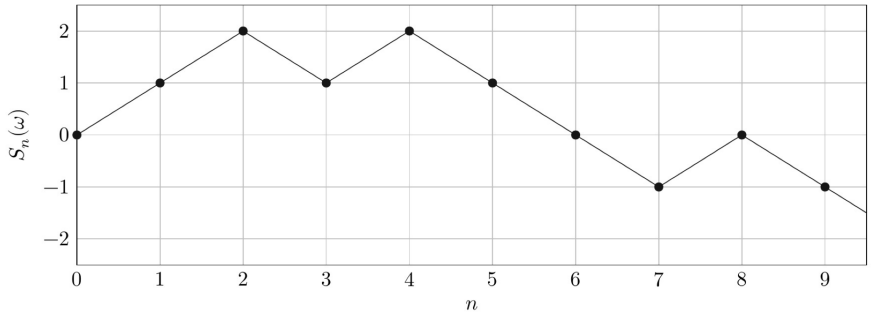


Figure 1 – Un exemple de trajectoire reliant $(0, 0)$ à $(9, -1)$.

Un tel type de ligne brisée est appelé **trajectoire** reliant un point à un autre (ce vocabulaire sera utile dans la sous-partie A-III., où on dénombre certains types de trajectoires).

Le but de cette ce qui suit est d'étudier la variable aléatoire $|S_n|$ exprimant, en fonction du temps, la distance du marcheur à son point d'origine et, notamment, de calculer un équivalent de son espérance et de sa variance. La dernière sous-partie relie la probabilité de ne jamais revenir à l'origine à la variable $|S_n|$.

1. **Lemme technique, utile pour la suite.** Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,
$$\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} = \frac{2k}{2n}\binom{2n}{n+k}$$
On admettra que, de même, $\binom{2n}{n+k} - \binom{2n}{n+k+1} = \frac{2k+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+k+1}$.

A-I. Quelques bases

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi suivie par $Y_n = \dfrac{X_n+1}{2}$? En déduire la loi de $\dfrac{S_n+n}{2}$ pour tout entier n non nul.
3. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(|S_n| \geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0)$? On justifiera la réponse.
6. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. Déterminer une expression de u_n et un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de u_n.

A-II. Étude de l'éloignement

Comme S_n est à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ (plus précisément $\{-n, -n+2, -n+4, \ldots, n-2, n\}$, $|S_n|$ est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On remarque de plus que si $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(|S_n| = k) = 0$ lorsque k n'est pas de la même parité que n.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et que $\dfrac{1}{2n+1}\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
8. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(|S_n|)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

A-III. Probabilité de non-retour en zéro

On cherche à déterminer $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)$. On note, pour $m \leqslant n$,

- $\mathscr{T}((m,a),(n,b))$ le nombre de trajectoires reliant (m,a) et (n,b).
- $\mathscr{C}((m,a),(n,b))$ le nombre de trajectoires reliant (m,a) et (n,b) sans intersecter l'axe des abscisses.
- $\mathscr{A}((m,a),(n,b))$ le nombre de trajectoires reliant (m,a) et (n,b) en intersectant l'axe des abscisses.

Une trajectoire partant de l'abscisse m allant à l'abscisse n est modélisée par une suite de déplacements $(x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ où pour tout i, $x_i = \pm 1$.

Ainsi, si on part de a en m, on arrive, en n, à $a + \sum_{i=m}^{n} x_i$.

9. Soient $b > 0$, $n \geqslant b$. Démontrer que

$$\mathscr{T}((1,1),(2n,2b)) = \binom{2n-1}{n+b-1} \text{ et } \mathscr{T}((1,-1),(2n,2b)) = \binom{2n-1}{n+b}.$$

10. Soit $b > 0$. Démontrer que pour tout $n \geqslant b$,

$$\begin{aligned}\mathscr{C}((1,1),(2n,2b)) &= \mathscr{T}((1,1),(2n,2b)) - \mathscr{A}((1,1),(2n,2b)) \\ &= \mathscr{T}((1,1),(2n,2b)) - \mathscr{T}((1,-1),(2n,2b)).\end{aligned}$$

et en déduire que $\mathscr{C}((1,1),(2n,2b)) = \binom{2n-1}{n+b-1} - \binom{2n-1}{n+b} = \frac{2b}{2n}\binom{2n}{n+b}$.

Des dessins seront + que bienvenus !

11. Justifier que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) &= \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) + \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0) \\ &= 2\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0)\end{aligned}$$

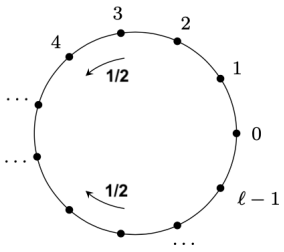
12. En déduire que pour tout n,

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|).$$

Interpréter ce résultat : quelle serait la probabilité de ne jamais repasser par 0 ?

B. Marche aléatoire sur le cercle

On considère cette fois-ci une marche aléatoire sur un « cercle », modélisé par ℓ points numérotés de 0 à $\ell - 1$.



Les déplacements successifs du marcheur sont modélisés par une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$, la position initiale étant $S_0 = 0$. La probabilité de faire un pas dans le sens direct est $\frac{1}{2}$, celle de faire un pas dans le sens rétrograde est $\frac{1}{2}$.

13. Justifier proprement que, si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_n = 0) \\ \mathbb{P}(S_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_n = \ell - 1) \end{pmatrix}, \text{ alors } C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = AC_n,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & 0 \\ 0 & 1/2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1/2 & 0 \\ 0 & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(J + J^\top), \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Représenter les matrices $J^2, \dots, J^{\ell-1}$ et J^ℓ. Laquelle des matrices précédentes est-elle égale à $J^\top$?

Dans toute la suite, on pose $\omega = e^{2i\pi/\ell}$ et

$$\forall k \in [\![0; \ell-1]\!] \quad U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(\ell-1)k} \end{pmatrix}$$

15. On considère la matrice P ayant pour colonnes $(U_0, \dots, U_{\ell-1})$. Démontrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \to \mathbb{C}^\ell \\ \qquad Q \mapsto \big(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{\ell-1})\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme et en déduire que $P^\top$ est inversible, puis que $(U_0, \dots, U_{\ell-1})$ est une base de $\mathscr{M}_{\ell,1}(\mathbb{C})$.

16. Déterminer la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à J dans la base $(U_0, \dots, U_{\ell-1})$ (au départ et à l'arrivée). En déduire, en utilisant le cours de cette semaine, que

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & (0) & \\ & & \omega^2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \omega^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

17. En remarquant que $A = \dfrac{1}{2}(J + J^\top)$, montrer que $\Delta = P^{-1}AP$ est diagonale ; expliciter Δ en fonction des $\lambda_k = \cos\left(\dfrac{2k\pi}{\ell}\right)$.

On dit qu'une suite de matrices converge si chacun de ses coefficients converge. Par exemple, on peut écrire que

$$\begin{pmatrix} 1/n & 1 - \mathrm{e}^{-n} \\ 0 & \dfrac{n+1}{n} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices, si $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$, alors $A_n + B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A + B$ et $A_nB_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A \times B$.

18. Montrer que la suite $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et expliciter sa limite.

19. En déduire que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer, sous forme d'un produit de matrice, sa limite (en particulier, on ne demande pas de calculer P^{-1}).

20. Calculer PU_0, puis en déduire $P^{-1}C_0$.

21. Exprimer C_n en fonction de A et de C_0. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \dfrac{1}{\ell}U_0$. Interpréter ce résultat du point de vue de la marche aléatoire sur le « cercle ».