MPSI 1

Mathématiques
DS 09

Samedi 4 mai – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un petit exercice de cours/calculs et d'un problème de probabilités (avec un peu de matrices à la fin).
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
  Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Cours et calculs*.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en le justifiant, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.

Correction

En posant $P(X) = X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega)$, on a

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n-1} = \frac{P'}{P} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{X-\omega}$$

2. Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

Correction

On remarque que $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$. Ainsi, on sait qu'il existe a, b, c tels que

$$\frac{2}{X^3 - X^2 + X - 1} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{X^2+1}.$$

On trouve $a = 1$, puis, en évaluant en 0, $c = -2 + a = -1$ et en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, $a + b = 0$. Donc $b = -1$. Donc

$$\frac{2}{X^3 - X^2 + X - 1} = \frac{1}{X-1} - \frac{X+1}{X^2+1}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{2}{t^3 - t^2 + t - 1}\,dt &= \ln|x-1| - \int^x \frac{t}{t^2+1}\,dt - \int^x \frac{1}{t^2+1}\,dt \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{Arctan}(x).\end{aligned}$$

3. Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donner une matrice de rang 1, une matrice de rang 2, une matrice de rang 3 chaque matrice ne contenant aucun coefficient nul. Justifier rapidement le rang de chaque matrice.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'image de A, son rang, la dimension et une base de son noyau.

Problème 1. Marches aléatoires

A. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

On modélise une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

- on travaille tout du long dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$;

- on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = +1) = \frac{1}{2}.$$
- On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

S_n correspond la position du « marcheur aléatoire » à l'instant n : à chaque instant il a une chance sur deux de faire un pas en avant, une chance sur deux de faire un pas en arrière. À ω fixé, on peut représenter graphiquement la réalisation d'une marche aléatoire comme l'ensemble des points $(n, S_n(\omega))$, que l'on relie afin de former une ligne brisée. On remarque qu'entre deux instants, $S_n(\omega)$ ne peut que augmenter de 1 ou diminuer de 1.

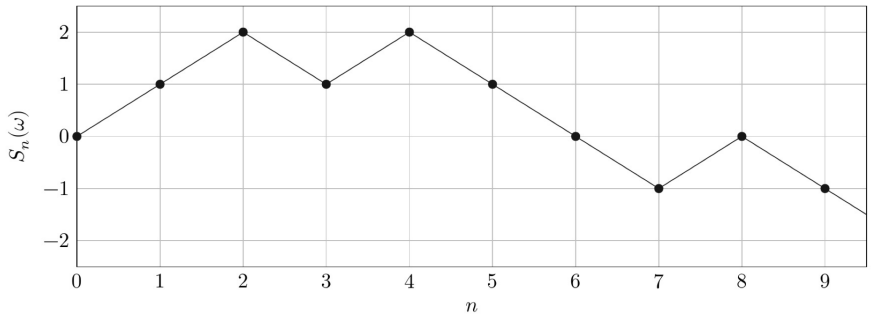


Figure 1 – Un exemple de trajectoire reliant $(0, 0)$ à $(9, -1)$.

Un tel type de ligne brisée est appelé **trajectoire** reliant un point à un autre (ce vocabulaire sera utile dans la sous-partie A-III., où on dénombre certains types de trajectoires).

Le but de cette ce qui suit est d'étudier la variable aléatoire $|S_n|$ exprimant, en fonction du temps, la distance du marcheur à son point d'origine et, notamment, de calculer un équivalent de son espérance et de sa variance. La dernière sous-partie relie la probabilité de ne jamais revenir à l'origine à la variable $|S_n|$.

1. **Lemme technique, utile pour la suite.** Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$,
$$\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} = \frac{2k}{2n}\binom{2n}{n+k}$$
On admettra que, de même, $\binom{2n}{n+k} - \binom{2n}{n+k+1} = \frac{2k+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+k}$.

Correction

On a juste à calculer...

$$\begin{aligned}\binom{2n-1}{n+k-1}-\binom{2n-1}{n+k} &= \frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(n-k)!}-\frac{(2n-1)!}{(n+k)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k}-\frac{1}{n+k}\right)\\ &= \frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(n-k-1)!}\frac{2k}{(n+k)(n-k)}\\ &= \frac{2k}{2n}\frac{2n}{(n+k)(n-k)}\frac{(2n-1)!}{(n+k-1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{2k}{2n}\binom{2n}{n+k}.\end{aligned}$$

Pour le résultat admis, je le démontre quand même :

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n+k}-\binom{2n}{n+k+1} &= \frac{(2n)!}{(n+k)!(n-k)!}-\frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k)!}\left((n+k+1)-(n-k)\right)\\ &= \frac{(2n)!}{(n+k+1)!(n-k)!}(2k+1)\\ &= \frac{2k+1}{2n+1}\frac{(2n+1)!}{(n+k+1)!(n-k)!} = \frac{2k+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+k+1}\end{aligned}$$

A-I. Quelques bases

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi suivie par $Y_n = \dfrac{X_n+1}{2}$? En déduire la loi de $\dfrac{S_n+n}{2}$ pour tout entier n non nul.

Correction

Comme X_n est à valeurs dans $\{-1,1\}$, Y_n est à valeurs dans $\{0,1\}$ et

$$\mathbb{P}(Y_n=0)=\mathbb{P}(X_n=-1)=\frac{1}{2},\ \mathbb{P}(Y_n=1)=\mathbb{P}(X_n=1)=\frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{X_n\sim\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$.
On en déduit que

$$\frac{S_n+n}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_n+1}{2}=\sum_{i=1}^{n}Y_i,$$

donc $\boxed{\frac{S_n+n}{2}\sim\mathscr{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)}$ comme somme de variables de Bernoulli mutuellement indépendantes.

3. Déterminer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{E}\left(S_n^2\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Correction

Par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(Y_i)=0,}$$

car pour $i\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y_i)=\frac{1}{2}\times(-1)+\frac{1}{2}\times 1=0$.
Comme $Y_1,\dots,Y_n$ sont mutuellement indépendantes, on en déduit que

$$\mathbb{V}(S_n)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i).$$

Or, $\mathbb{V}(X_i)=\mathbb{E}(X_i^2)-\mathbb{E}(X_i)^2=1-0$, car $X_i^2=1$. Donc $\boxed{\mathbb{V}(S_n)=n}$.

4. Démontrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}\left(|S_n|\geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Correction

Soit $\varepsilon>0$. Soit n dans $\mathbb{N}$. Alors, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff,

$$\mathbb{P}\left(|S_n-\mathbb{E}(S_n)|\geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}(S_n)}{(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})^2},$$

i.e.

$$\mathbb{P}\left(|S_n|\geqslant n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)\leqslant\frac{n}{n^{1+2\varepsilon}}=\frac{1}{n^{2\varepsilon}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}(S_{2n+1}=0)$? On justifiera la réponse.

Correction

Pour que $S_{2n+1} = 0$, il faut avoir autant de X_i égaux à 1 qu'à -1 parmi $X_1, \dots, X_{2n+1}$, ce qui est impossible ! $\boxed{\text{Donc } \mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0.}$

6. On pose, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. Déterminer une expression de u_n et un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de u_n.

Correction

Posons $T_n = \dfrac{S_n + n}{2}$. Alors on a vu que $T_n \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \mathbb{P}(2T_{2n} - 2n = 0)\\ &= \mathbb{P}(2T_{2n} = 2n)\\ &= \mathbb{P}(T_{2n} = n)\\ &= \boxed{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.}\end{aligned}$$

On a alors

$$u_n = \frac{1}{4^n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4^n}\frac{\sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

A-II. Étude de l'éloignement

Comme S_n est à valeurs dans $[\![-n, n]\!]$ (plus précisément $\{-n, -n+2, -n+4, \dots, n-2, n\}$, $|S_n|$ est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On remarque de plus que si $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(|S_n| = k) = 0$ lorsque k n'est pas de la même parité que n.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ et que $\dfrac{1}{2n+1}\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

Correction

Faisons le calcul (et croisons les doigts !). On sait que $|S_{2n}|$ est à valeurs dans

$\{0, 2, 4, \dots, 2n\}$. On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|) &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} 2k\mathbb{P}(|S_{2n}| = 2k) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} 2k\left(\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) + \mathbb{P}(S_{2n} = -2k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{2k}{2n}\left(\mathbb{P}(S_{2n} = 2k) + \mathbb{P}(S_{2n} = -2k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\left(\mathbb{P}(2T_{2n} - 2n = 2k) + \mathbb{P}(2T_{2n} - 2n = -2k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\left(\mathbb{P}(T_{2n} = n + k) + \mathbb{P}(T_{2n} = n - k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{1}{4^n}\left(\binom{2n}{n+k} + \binom{2n}{n-k}\right) \\
&= \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{2n}{n+k} \\
&= \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}\right) \text{ par le lemme technique.} \\
&\boxed{= \frac{2}{4^n}\binom{2n-1}{n-1}} \text{ par télescopage}
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n}\frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{2}{4^n}\binom{2n-1}{n-1} = \boxed{\frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|)}$, d'où le résultat.

De même, $|S_{2n+1}|$ est à valeurs dans $\{1,3,\dots,2n+1\}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n+1}\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) &= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\mathbb{P}(|S_{2n+1}|=2k+1)\\
&= \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}2k\left(\mathbb{P}(S_{2n+1}=2k+1)+\mathbb{P}(S_{2n+1}=-2k-1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2n+1}\left(\mathbb{P}(S_{2n+1}=2k+1)+\mathbb{P}(S_{2n+1}=-2k-1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2n+1}\left(\mathbb{P}(2T_{2n+1}-2n-1=2k+1)+\mathbb{P}(2T_{2n+1}-2n-1=-2k-1)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2n+1}\left(\mathbb{P}(T_{2n+1}=n+k+1)+\mathbb{P}(T_{2n+1}=n-k)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2n+1}\frac{1}{2^{2n+1}}\left(\binom{2n+1}{n+k+1}+\binom{2n+1}{n-k}\right)\\
&= \frac{2}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2n+1}\binom{2n+1}{n+k+1}\\
&= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n}{n+k}-\binom{2n}{n+k+1}\right) \text{ par le lemme technique.}\\
&\boxed{= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \mathbb{P}(S_{2n}=0)} \text{ par télescopage}
\end{aligned}$$

8. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(|S_n|)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

On sait déjà que

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = 2n\mathbb{P}(S_{2n}=0) = 2nu_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{\pi n}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2n}.$$

De même,

$$\mathbb{E}(|S_{2n}|) = (2n+1)\mathbb{P}(S_{2n}=0) = (2n+1)u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{\pi n}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Donc (astuce)

$$\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2n+1},$$

donc, comme les suites extraites des termes pairs et impairs de la suite $\left(\frac{\mathbb{E}(|S_n|)}{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}}\right)$

tendent toutes deux vers 1, on en déduit que

$$\boxed{\mathbb{E}(|S_n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}}$$

A-III. Probabilité de non-retour en zéro

On cherche à déterminer $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)$. On note, pour $m \leqslant n$,

- $\mathscr{T}((m,a),(n,b))$ le nombre de trajectoires reliant (m,a) et (n,b).
- $\mathscr{C}((m,a),(n,b))$ le nombre de trajectoires reliant (m,a) et (n,b) sans intersecter l'axe des abscisses.
- $\mathscr{A}((m,a),(n,b))$ le nombre de trajectoires reliant (m,a) et (n,b) en intersectant l'axe des abscisses.

Une trajectoire partant de l'abscisse m allant à l'abscisse n est modélisée par une suite de déplacements $(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$ où pour tout i, $x_i = \pm 1$.

Ainsi, si on part de a en m, on arrive, en n, à $a + \sum_{i=m}^{n} x_i$.

9. Soient $b > 0$, $n \geqslant b$. Démontrer que

$$\mathscr{T}((1,1),(2n,2b)) = \binom{2n-1}{n+b-1} \text{ et } \mathscr{T}((1,-1),(2n,2b)) = \binom{2n-1}{n+b}.$$

Correction

Une trajectoire est, comme donné par l'énoncé, une succession de 1 et de -1. Comme on va de l'abscisse 1 à l'abscisse $2n$, il y a $2n-1$ « ± 1 ». S'il y a k « 1 », alors il y a $2n-1-k$ « -1 », donc la trajectoire passe de 1 à $2k+2-2n$. Or, on veut que l'ordonnée finale soit $2b$, donc que $2k-2n+2 = 2b$, donc $k = n+b-1$.
Choisir un chemin qui va de $(1,1)$ à $(2n,2b)$, c'est donc choisir la position des $n+b-1$ « 1 » dans la trajectoire, d'où $\boxed{\binom{2n-1}{n+b-1} \text{ choix possibles.}}$

$\boxed{\text{On fait de même pour aller de } (1,-1) \text{ à } (2n,2b)}$, sauf que l'ordonnée finale est $2k-2n$, d'où $k = n+b$.

10. Soit $b > 0$. Démontrer que pour tout $n \geqslant b$,

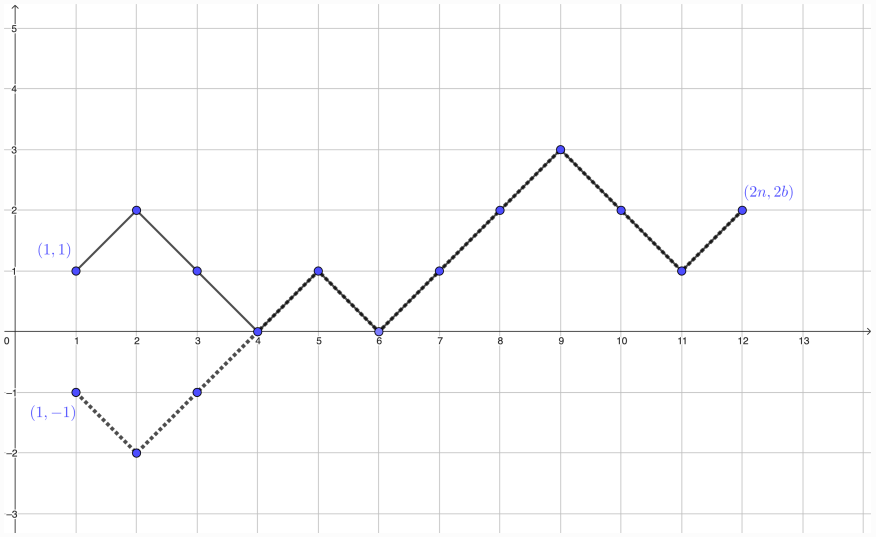
$$\begin{aligned}\mathscr{C}((1,1),(2n,2b)) &= \mathscr{T}((1,1),(2n,2b)) - \mathscr{A}((1,1),(2n,2b)) \\ &= \mathscr{T}((1,1),(2n,2b)) - \mathscr{T}((1,-1),(2n,2b)).\end{aligned}$$

et en déduire que $\mathscr{C}((1,1),(2n,2b)) = \binom{2n-1}{n+b-1} - \binom{2n-1}{n+b} = \frac{2b}{2n}\binom{2n}{n+b}$.

Des dessins seront + que bienvenus !

Correction

La première égalité est évidente. Pour la seconde, il suffit de remarquer que, moyennant une réflexion, les chemins qui relient $(1,-1)$ à $(2n,2b)$ sont en bijection avec ceux qui relient $(1,1)$ et $(2n,2b)$ en passant par l'axe des abscisses.



En effet, si on prend un chemin qui va de $(1,1)$ à $(2n,2b)$ en passant par l'axe des abscisses (chemin en trait plein), on lui associe le chemin (en pointillés) allant de $(1,-1)$ à $(2n,2b)$ en procédant de la sorte : on note k la première fois que le chemin en trait plein rencontre l'axe des abscisses. On fait alors la symétrie de la portion de chemin de 1 à k, puis ensuite on suit le chemin original.
On en déduit le résultat par la question précédente.

11. Justifier que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) &= \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) + \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0) \\ &= 2\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0)\end{aligned}$$

Correction

Comme à chaque étape on avance de 1 ou on recule de 1, avoir $S_i \neq 0$ pour tout i revient à avoir $S_i > 0$ pour tout i ou bien $S_i < 0$ pour tout i (si $S_i > 0$ et $S_j < 0$, nécessairement, il existe k tel que $S_k = 0$). Donc

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0)\\ &= \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) + \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0)\end{aligned}$$

Or, par symétrie, il y a autant de chemins au-dessus de l'axe des abscisses que en-dessous de l'axe des abscisses, donc

$$\mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0) = \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0),$$

d'où le résultat désiré.

12. En déduire que pour tout n,

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_{2n}|).$$

Interpréter ce résultat : quelle serait la probabilité de ne jamais repasser par 0 ?

Correction

On écrit alors que

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0) + \mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0).$$

Ensuite, si $b > 0$

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n} > 0, S_{2n} = 2b) = \frac{\mathscr{T}_+((1,1),(2n,2b))}{2^n} = \frac{2b}{2n}\mathbb{P}(S_{2n} = 2b),$$

et, de même,

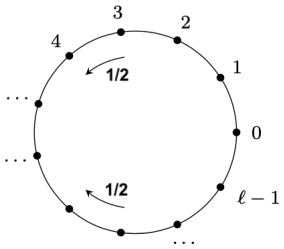
$$\mathbb{P}(S_1 < 0, S_2 < 0, \dots, S_{2n} < 0, S_{2n} = -2b) = \frac{2b}{2n}\mathbb{P}(S_{2n} = -2b),$$

et donc, par la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{E}(|S_n|)$.
Ainsi, la probabilité de ne jamais atteindre 0 jusqu'au rang n est

$$\frac{1}{2n}\mathbb{E}(|S_n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$, la probabilité de ne jamais atteindre 0 tend vers 0 : on va presque sûrement rencontrer l'axe des abscisses dans une marche aléatoire 1-D.

B. Marche aléatoire sur le cercle



On considère cette fois-ci une marche aléatoire sur un « cercle », modélisé par ℓ points numérotés de 0 à $\ell-1$.

Les déplacements successifs du marcheur sont modélisés par une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$, la position initiale étant $S_0 = 0$. La probabilité de faire un pas dans le sens direct est $\frac{1}{2}$, celle de faire un pas dans le sens rétrograde est $\frac{1}{2}$.

13. Justifier proprement que, si l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_n = 0) \\ \mathbb{P}(S_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(S_n = \ell - 1) \end{pmatrix}, \text{ alors } C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad C_{n+1} = AC_n,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & 0 \\ 0 & 1/2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1/2 & 0 \\ 0 & & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & \cdots & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(J + J^\top), \text{ où } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in [\![1, \ell-2]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{n+1}=k) &= \mathbb{P}_{S_n=k-1}(S_n=k)\mathbb{P}(S_n=k-1) + \mathbb{P}_{S_n=k+1}(S_n=k)\mathbb{P}(S_n=k+1)\\ &= \boxed{\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=k-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=k+1).}\end{aligned}$$

De même

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{n+1}=0)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=\ell-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=1)}$$

et

$$\boxed{\mathbb{P}(S_{n+1}=\ell-1)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=\ell-2)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=0)}$$

D'où

$$C_{n+1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(S_n=1)+\mathbb{P}(S_n=\ell-1)\\ \mathbb{P}(S_n=0)+\mathbb{P}(S_n=2)\\ \mathbb{P}(S_n=1)+\mathbb{P}(S_n=3)\\ \vdots\\ \mathbb{P}(S_n=\ell-2)+\mathbb{P}(S_n=0)\end{pmatrix}=AC_n.$$

D'où le résultat désiré !

14. Représenter les matrices $J^2, \dots, J^{\ell-1}$ et J^ℓ. Laquelle des matrices précédentes est-elle égale à $J^\top$?

Correction

C'est pénible à taper...

$$J^2=\begin{pmatrix}0&0&1&&&\\ &0&0&1&&(0)\\ &&\ddots&\ddots&\ddots&\\ &&&\ddots&\ddots&1\\ &&(0)&&\ddots&0\\ 1&&&&&0\\ 0&1&&&&0\end{pmatrix}$$

et on obtient tous les J^k en décalant les diagonales de 1. En particulier,

$$\boxed{J^\ell=\mathrm{I}_n},\quad \boxed{J^{\ell-1}=J^\top=J^{-1}}$$

Dans toute la suite, on pose $\omega = e^{2i\pi/\ell}$ et

$$\forall k \in [\![0; \ell-1]\!] \quad U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(\ell-1)k} \end{pmatrix}$$

15. On considère la matrice P ayant pour colonnes $(U_0, \dots, U_{\ell-1})$. Démontrer que l'application

$$\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{C}_{\ell-1}[X] \to \mathbb{C}^\ell \\ \qquad Q \mapsto \big(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{\ell-1})\big) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme et en déduire que $P^\top$ est inversible, puis que $(U_0, \dots, U_{\ell-1})$ est une base de $\mathscr{M}_{\ell,1}(\mathbb{C})$.

Correction

Comme $(1, \omega, \dots, \omega^{\ell-1})$ sont deux à deux distincts (éléments de $\mathbb{U}_\ell$), le théorème d'interpolation de Lagrange assure que φ est un isomorphisme. Ainsi, $P^\top$, qui est la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{\ell-1}[X]$ au départ et $\mathbb{C}^\ell$ à l'arrivée, est inversible.
Donc P est aussi inversible, donc ses colonnes forment une base de $\mathscr{M}_{\ell,1}(\mathbb{C})$.

16. Déterminer la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à J dans la base $(U_0, \dots, U_{\ell-1})$ (au départ et à l'arrivée). En déduire, en utilisant le cours de cette semaine, que

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & (0) & \\ & & \omega^2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \omega^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

Correction

Soit k dans $[\![0, \ell-1]\!]$. Alors

$$JU_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(\ell-1)k} \\ 1 \end{pmatrix} = \omega^k U_k.$$

Ainsi, la matrice de cette application linéaire est $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & (0) & \\ & & \omega^2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \omega^{\ell-1} \end{pmatrix}$. Par le cours, cette matrice est semblable à J, et la matrice de passage est la matrice de

$(U_0, \dots, U\ell - 1)$ dans la base canonique, i.e. P. Donc

$$P^{-1}JP = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & (0) & \\ & & \omega^2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \omega^{\ell-1} \end{pmatrix}$$

17. En remarquant que $A = \frac{1}{2}(J + J^\top)$, montrer que $\Delta = P^{-1}AP$ est diagonale ; expliciter Δ en fonction des $\lambda_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{\ell}\right)$.

Correction

Même si on n'a pas compris le cours de cette semaine, on peut rattraper cette question. On en déduit que

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{2}P^{-1}(J + J^\top)P \\
&= \frac{1}{2}(P^{-1}JP + P^{-1}J^{-1}P) \\
&= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & (0) & \\ & & \omega^2 & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \omega^{\ell-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega^{-1} & & (0) & \\ & & \omega^{-2} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \omega^{-(\ell-1)} \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & & & & \\ & e^{\frac{2i\pi}{\ell}} + e^{-\frac{2i\pi}{\ell}} & & (0) & \\ & & e^{\frac{4i\pi}{\ell}} + e^{-\frac{4i\pi}{\ell}} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & e^{\frac{2(\ell-1)i\pi}{\ell}} + e^{-\frac{2(\ell-1)i\pi}{\ell}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(0) & & & & \\ & \cos\left(\frac{2\pi}{\ell}\right) & & (0) & \\ & & \cos\left(\frac{4\pi}{\ell}\right) & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & \cos\left(\frac{2(\ell-1)\pi}{\ell}\right) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donc Δ est la matrice diagonale formée des λ_k !

On dit qu'une suite de matrices converge si chacun de ses coefficients converge. Par exemple, on

peut écrire que

$$\begin{pmatrix} 1/n & 1-\mathrm{e}^{-n} \\ 0 & \dfrac{n+1}{n} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de matrices, si $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$ et $B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B$, alors $A_n + B_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A+B$ et $A_nB_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A\times B$.

18. Montrer que la suite $(\Delta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et expliciter sa limite.

Correction

Si $k \in [\![1, \ell-1]\!]$, $|\lambda_k| < 1$ donc $\lambda_k^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\Delta^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E_{11}$$

(matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_\ell(\mathbb{K})$).

19. En déduire que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer, sous forme d'un produit de matrice, sa limite (en particulier, on ne demande pas de calculer P^{-1}).

Correction

On en déduit que $A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P^{-1}E_{11}P$.

20. Calculer PU_0, puis en déduire $P^{-1}C_0$.

Correction

On calcule

$$PU_0 = \begin{pmatrix} 1+1+\cdots+1 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \omega^k \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\omega^2)^k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\omega^{\ell-1})^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\ell C_0},$$

car pour $p \in [\![1, \ell-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} (\omega^p)^k = 0$. Donc $P^{-1}C_0 = \dfrac{1}{\ell}U_0$.

21. Exprimer C_n en fonction de A et de C_0. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \dfrac{1}{\ell}U_0$. Interpréter ce résultat du point de vue de la marche aléatoire sur le « cercle ».

Correction

On en déduit alors que

$$C_n = A^n C_0 = P\Delta^n P^{-1} C_0 = \frac{1}{\ell} P\Delta^n U_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell} PE_{11}U_0 = \frac{1}{\ell} PU_0 = \frac{1}{\ell} C_0.$$

Cela signifie qu'en temps long, la loi de la position sur le cercle est presque une loi uniforme.