MPSI

Mathématiques Devoir surveillé 07

Samedi 9 mars – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Le sujet est constitué d'un seul problème. Les parties A et B sont **communes aux deux classes**. La partie C est **réservée aux MPSI1**, les parties D et E sont **réservées aux MPSI2**.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- La présentation et le soin apporté aux réponses seront pris en compte dans la notation. **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
- Lorsque vous utilisez le résultat d'une question précédente, **donnez le numéro de la question utilisée.**
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fautive, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage ! ♪

Racines carrées

Ce problème permet d'aborder divers avatars de la notion de racine carrée. Les parties sont largement indépendantes. Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La partie A. est centrée sur des considérations d'analyse, et notamment d'analyse asymptotique.

La partie B., quant à elle, s'intéresse aux polynômes qui sont des carrés d'autres polynômes, en utilisant un point de vue analytique, puis un point de vue arithmétique. On notera que la question 10. sera à utiliser dans les autres parties.

Ensuite, des parties d'algèbre linéaire font le lien entre polynômes et algèbre, de deux manières différentes :

- la partie C., réservée aux MPSI1, s'intéresse à la possibilité d'écrire une matrice comme un carré d'une autre matrice.
- réservées aux MPSI2, les parties D. et E. permettent de déterminer l'éventuelle existence d'une racine carrée d'un endomorphisme et, en particulier, de l'endomorphisme de dérivation.

A. Un peu d'analyse

A-I. Questions préliminaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0, $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre n , et, plus précisément, que $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$.

1. **COURS** Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Donner les coefficients de P^2 .
2. Démontrer que $f(x)^2 = \sum_{k=0}^n b_k x^k + o(x^n)$, où l'on précisera l'expression de b_k pour tout k .
3. **COURS** Donner le développement limité à l'ordre n de $\sqrt{1+h}$ au voisinage de 0. On laissera les coefficients sous forme d'un produit.

A-II. Étude d'une fonction

On note I l'intervalle $\left] -\infty, \frac{1}{4} \right[$. On veut dans cette partie déterminer toutes les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I vérifiant la relation

$$\forall x \in I \quad x f^2(x) - f(x) + 1 = 0 \quad (*)$$

4. Préciser $f(0)$ pour une telle fonction. et montrer qu'il existe une fonction $\epsilon : I \setminus \{0\} \rightarrow \{-1, 1\}$ vérifiant $\forall x \in I \setminus \{0\} \quad f(x) = \frac{1 + \epsilon(x)\sqrt{1-4x}}{2x}$

On note, pour tout x dans $I \setminus \{0\}$, $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

5. Démontrer que g est prolongeable par continuité en 0. Donner la valeur de son prolongement par continuité en 0, et démontrer la dérivabilité de ce prolongement par continuité. On notera également g la fonction ainsi prolongée.
6. Montrer que ϵ est continue, prolongeable par continuité sur I tout entier, et en déduire finalement $f = g$.

7. Démontrer que g admet un développement limité à tout ordre en 0 et que, si $n \in \mathbb{N}$,

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + o(x^n),$$

$$\text{où, pour tout } k \text{ dans } \llbracket 0, n \rrbracket \quad c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}.$$

B. Racines carrées de polynômes

B-I. Valuation d'un polynôme

Si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$, on définit la valuation de P , notée $\text{val}(P)$, comme

$$\text{val}(P) = \min\{k \in \llbracket 0, d \rrbracket, a_k \neq 0\}.$$

Par convention, on dit que $\text{val}(0_{\mathbb{C}[X]}) = +\infty$. Soient P et Q deux polynômes.

8. Si on note $p = \text{val}(P)$, démontrer que $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_p x^p$. En déduire que, pour n dans $\mathbb{N}$, $P(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ si, et seulement si X^{n+1} divise P .

9. Soient P et Q deux polynômes non nuls. Donner, en le démontrant, un lien entre $\text{val}(P+Q)$, $\text{val}(P)$ et $\text{val}(Q)$. Faire de même pour $\text{val}(PQ)$.

Application. On note $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients du développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n(X) = \sum_{k=0}^n s_k X^k$.

10. Démontrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = S_n(X)^2 + X^{n+1}R(X)$.
On pourra utiliser la question 8.

B-II. Détermination pratique de la racine d'un polynôme

Soit P un polynôme à coefficients réels, ne s'annulant pas en 0. On veut démontrer que P est un carré si et seulement si les trois propositions suivantes sont simultanément vérifiées :

(a) son degré d est pair,

(b) $P(0) > 0$,

(c) il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_{d/2}[X]$ vérifiant $\sqrt{P(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} Q(h) + o(h^d)$.

Dans ce cas on aura $Q^2 = P$.

11. Démontrer que si P est le carré d'un autre polynôme, alors les propositions (a),(b),(c) sont vraies.

[Remplacer simplement par « démontrer la réciproque »] On suppose désormais que les propositions (a), (b), (c) sont vraies. On écrit $d = 2n$ et

$$P(X) = \alpha^2 + a_1X + \cdots + a_{2n}X^{2n}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

12. Vérifier que $P(x) > 0$ au voisinage de 0 et démontrer qu'il existe un polynôme Q (que l'on ne cherchera pas à exprimer) de degré n vérifiant

$$\sqrt{P(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} Q(h) + o(h^n)$$

13. Démontrer que si $\sqrt{P(h)} \underset{h \rightarrow 0}{=} Q(h) + o(h^d)$, alors $Q^2 = P$. On pourra utiliser la question 8.
14. Dans le cas où $P(0) = 0$, énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que P soit un carré, similaire aux conditions (a), (b), (c). On ne demande pas de la démontrer. Cette CNS fera intervenir la notion de valuation.

B-III. Factorisation en puissances croissantes

15. Démontrer qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé à racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$.
16. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $P \in \mathbb{C}[X]$ pour qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que P divise $(P')^k$.

On veut démontrer que tout polynôme unitaire admet une unique factorisation en puissances croissantes, c'est-à-dire que pour tout polynôme unitaire P , il existe un unique entier s , un unique s -uplet de polynômes $(P_1, \dots, P_s)$, unitaires, tous à racines simples, premiers entre eux deux à deux, tels que

$$P = P_1 P_2^2 P_3^3 \dots P_s^s, \text{ et } P_s \neq 1.$$

Par exemple, si $P(X) = X^4(X-1)(X-\pi)^2(X-2)(X-5)^4$, alors on posera $P_1 = (X-1)(X-2)$, $P_2 = (X-\pi)$, $P_3 = 1$ et $P_4 = X(X-5)$. On aura bien $P = P_1 P_2^2 P_3^3 P_4^4$, et (P_1, P_2, P_3, P_4) premiers entre eux deux à deux.

17. Démontrer que tout polynôme unitaire de $\mathbb{C}[X]$ admet une factorisation en puissances croissantes. On en admet l'unicité.
Si la décomposition de P en puissances croissantes est $P = P_1 P_2^2 \dots P_s^s$, exprimer $P_1 \dots P_s$ à l'aide des racines de P .

Obtenir cette factorisation semble nécessiter de connaître la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles, question difficile à résoudre. Nous allons proposer un algorithme, basé sur un calcul de pgcd, permettant de déterminer la factorisation de P en puissances croissantes.

On part de P un polynôme unitaire, $P_1 P_2^2 P_3^3 \dots P_s^s$ sa factorisation en puissances croissantes.

18. Démontrer que le pgcd D de P et P' est $D = P_2 P_3^2 \dots P_s^{s-1}$. On note Q le polynôme vérifiant $P = DQ$.
19. Démontrer qu'alors P_1 est le quotient de Q par $D \wedge Q$.
20. Comment déterminer ensuite $P_2, P_3, \dots$? En quoi cette factorisation peut permettre une méthode effective (algorithmique) permettant de déterminer si un polynôme est un carré?

C. (MPSI1) Racines carrées de matrices

Si $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ est un polynôme, si M est une matrice carrée de taille n , on note $P(M)$ la

matrice $\sum_{k=0}^d a_k M^k$. On rappelle que $M^0 = I_n$.

Le but de cette partie est de savoir, étant donnée une matrice M , s'il existe une matrice N vérifiant $N^2 = M$; une question supplémentaire sera de savoir si, de plus, N peut être exprimée comme un polynôme en M .

C-I. Quelques manipulations

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, et le polynôme $P(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$

21. Calculer $P(M)$ et vérifier que $P(M)^2 = M$.

C-II. Cas d'une matrice diagonalisable

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice inversible B et une matrice diagonale D à coefficients deux à deux distincts vérifiant $M = BDB^{-1}$. On note

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ où } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ sont deux à deux distincts.}$$

22. Démontrer que pour tout polynôme P ,

$$P(M) = B \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} B^{-1}$$

On note, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, δ_i une racine carrée de λ_i .

23. **COURS** Donner l'unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\lambda_i) = \delta_i$. Déterminer (en refaisant la preuve) l'ensemble

$$\{Q \in \mathbb{C}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(\lambda_i) = \delta_i\}.$$

24. Démontrer qu'alors $P(M)^2 = M$.

25. Comment adapter le résultat précédent au cas où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ne sont pas deux à deux distincts?

C-III. Un deuxième cas particulier

Dans cette partie, on suppose que $M = I_n + A$, où A vérifie $A^p = 0_n$, avec $p \in \mathbb{N}^*$.

26. Démontrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(A)^2 = I_n + A = M$, puis en déduire qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $Q(M)^2 = M$. On pourra utiliser la question 10.

27. À titre d'exemple, faire le lien entre la question précédente et l'exemple de la question 21.

C-IV. Cas quelconque – un exemple

Nous allons, dans un cas particulier, chercher à résoudre le problème de la recherche d'une racine carrée dans un cas qui n'est pas traité par les parties précédentes. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

28. Calculer, pour k dans $\mathbb{N}^*$, A^k .

29. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, Démontrer que

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(1) & P'(1) & 0 \\ 0 & P(1) & 0 \\ 0 & 0 & P(4) \end{pmatrix}$$

30. Déterminer un polynôme P vérifiant $P(1) = 1$, $P'(1) = \frac{1}{2}$, $P(4) = 2$ et en déduire que $P(A)^2 = A$.

D. (MPSI2) Racines carrées d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Si $P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, si φ est un endomorphisme de E , on note $P(\varphi)$

l'endomorphisme $\sum_{k=0}^d a_k \varphi^k$, où l'on a défini

$$\varphi^k = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{k \text{ fois}}, \text{ et, par convention, } \varphi^0 = \text{Id}_E.$$

La question que l'on se pose est la suivante : étant donné un endomorphisme φ de E , existe-t-il un endomorphisme ψ de E vérifiant $\psi^2 = \varphi$? Peut-on, de plus, imposer que ψ soit un polynôme en φ ?

D-I. Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, deux à deux distincts, φ un endomorphisme de E tel que pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(e_i) = \lambda_i e_i$.

21. COURS Démontrer qu'un tel φ est unique.
22. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Démontrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$, $\varphi^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$ et que, si $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(\varphi)(e_i) = P(\lambda_i)e_i.$$

On note, pour tout i , δ_i une racine carrée de λ_i .

23. COURS Donner l'unique polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifiant, pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $P(\lambda_i) = \delta_i$. Déterminer alors l'ensemble

$$\{Q \in \mathbb{C}[X], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(\lambda_i) = \delta_i\}.$$

24. Démontrer qu'alors, si $\psi = P(\varphi)$, on a $\psi \circ \psi = \varphi$.
25. Comment adapter le résultat précédent au cas où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ne sont pas deux à deux distincts ?
26. À titre d'exemple, on considère E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, (e_1, e_2, e_3) une base de E , et φ la symétrie par rapport à $\text{Vect}(e_1)$, parallèlement à $\text{Vect}(e_2, e_3)$.
Déterminer un polynôme P tel que si $\psi = P(\varphi)$, alors $\psi \circ \psi = \varphi$ (on ne demande pas de forme développée).

D-II. Un deuxième cas particulier

On suppose que $\varphi = \text{Id}_E + \psi$, où ψ vérifie $\psi^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$.

27. Démontrer qu'il existe un polynôme P tel que $P(\varphi)^2 = \varphi$.

E. (MPSI2) Racines carrées de la dérivation

28. On considère ici un espace vectoriel E admettant une base de cardinal n , et on considère u un endomorphisme nilpotent de E , c'est-à-dire qu'il existe un entier $k_0 \geq 1$ tel que $u^{k_0} = 0$. On appelle indice de nilpotence de u le plus petit entier k tel que $u^k = 0$.

(a) Montrer l'existence de l'indice de nilpotence. On le note p .

(b) On veut montrer ici que p est inférieur ou égal à n . Pour cela, on considère un vecteur x appartenant à $E \setminus \ker(u^{p-1})$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, puis conclure.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et on note Δ l'endomorphisme de dérivation de E_n .

On cherche ici à montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E_n)$ vérifiant $u^2 = \Delta$ et on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un tel endomorphisme u de E .

29. Vérifier que Δ est nilpotent et préciser son indice de nilpotence p . Vérifier également que u est nilpotent.

30. En déduire une contradiction dans le cas où n est impair.

31. Démontrer le résultat annoncé quand n est pair.