MPSI 1

Mathématiques
DS 06

Samedi 3 février – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de deux problèmes : un d'algèbre (structures algébriques et matrices) et un d'analyse (continuité/dérivabilité/convexité).
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
  Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$, groupe $SL_2(\mathbb{Z})$

On rappelle que quel que soit n dans $\mathbb{N}^*$, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau, de neutre pour $+$ noté 0_n (la matrice carrée nulle), de neutre pour $\times$ noté I_n (la « matrice identité », diagonale avec des 1 sur la diagonale).

A. Déterminant d'une matrice

On note, si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$.

1. Démontrer que pour toutes (A, B) dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

2. Que vaut $\det(\mathrm{I}_2)$? Démontrer que, si $A \in GL_2(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

3. L'application det est-elle...

- un morphisme d'anneaux de $(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +, \times)$?
- un morphisme de groupes de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$?

B. L'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$

On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées à 2 lignes et à 2 colonnes, à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

4. Justifier assez rapidement que $(\mathscr{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un anneau.

5. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que A est inversible, **d'inverse dans** $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ si, et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. On note $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1.

6. Vérifier que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.

7. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. À titre d'exemple, déterminer l'ensemble des matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$.

C. Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$

On note $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Vérifier que S et T sont bien dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Calculer S^2, T^2.

9. Vérifier que $\varphi : \left| \begin{array}{l} (\mathbb{Z}, +) \to (SL_2(\mathbb{Z}), \times) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes et en déduire, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, T^n.

10. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, que valent SM, MS, T^nM, MT^n ?

Le but de cette partie est de démontrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T, c'est-à-dire que toute matrice M de $SL_2(\mathbb{Z})$ peut s'écrire comme produit de puissances (positives ou négatives) de S et de T. En d'autres termes, on veut écrire que

$$\forall M \in SL_2(\mathbb{Z}),\ \exists N \in \mathbb{N},\ \exists (a_1, \dots, a_{2N}) \in \mathbb{Z}^N,\ M = S^{a_1}T^{a_2}S^{a_3}T^{a_4}\dots S^{a_{2N-1}}T^{a_{2N}}.$$

Soit M dans $SL_2(\mathbb{Z})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On suppose momentanément que $c = 0$.

11. Démontrer alors qu'il existe m dans $\mathbb{Z}$ tel que $M = T^m$ ou qu'il existe m dans $\mathbb{Z}$ tel que $M = S^2T^m$.

On revient au cas général, c est supposé non nul. M est toujours égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

12. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que la matrice ST^pM est de la forme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ avec $|c'| < |c|$.

On pourra faire une division euclidienne.

13. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n$ des entiers relatifs tels que $ST^{p_n}ST^{p_{n-1}}\dots ST^{p_1}M$ ait un coefficient en bas à gauche qui soit nul, puis que M s'écrit comme un produit de puissances des matrices S et T.

14. À titre d'exemple, écrire la matrice $\begin{pmatrix} 19 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ comme produit de puissances de S et T.

Problème 2. Équation de Sturm-Liouville

Le but du problème est l'étude qualitative des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0, \tag{E}$$

où q est une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle solution de (E) toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, pour tout nombre réel t.

On admettra sans démonstration le résultat suivant, appelé « Théorème de Cauchy linéaire » : pour tous nombres réels t_0, y_0, y_1, il existe une unique solution y de (E) qui satisfait,

$$y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = y_1.$$

En particulier, si y est une solution de (E) telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors y est la solution identiquement nulle !

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est positive (resp. négative) si elle vérifie $f(t) \geqslant 0$ (resp. $f(t) \leqslant 0$) pour tout nombre réel t.

On dira qu'un nombre réel t est un zéro d'une fonction f si $f(t) = 0$.

A. Principe des zéros isolés

On veut démontrer la propriété suivante :

Proposition 1

Soit y une solution non identiquement nulle de (E), soit α un zéro de y. Alors α est *isolé*, c'est-à-dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout t dans $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \setminus \{\alpha\}$, $y(t) \neq 0$.

On dit que α est un zéro *isolé*, car, justement, c'est le seul zéro de y dans un certain intervalle.

Supposons, par l'absurde, que α ne soit pas isolé.

1. En niant le fait que α est isolé, démontrer que l'on peut trouver une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $t_n \neq \alpha$,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $y(t_n) = 0$,
- $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

2. Justifier que l'on peut même supposer la suite précédente strictement monotone.

Sans perte de généralité, on suppose $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante : $t_0 < t_1 < \dots$.

3. Démontrer que $y'(\alpha) = 0$ et aboutir à une contradiction.

Ainsi, comme les zéros de y sont isolés, cela a du sens de parler de « deux zéros consécutifs » de y.

B. Résultats préliminaires

B-I. Fonctions convexes

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, convexe et positive. On suppose que f a deux zéros t_1, t_2 et que $t_1 < t_2$. Montrer que f est nulle sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

5. Montrer que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

B-II. Un résultat technique

6. Soit $a > 0$, φ une fonction $\mathscr{C}^2$, telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $g = \varphi'' - a^2\varphi$. Démontrer que

$$\varphi(x) = \frac{1}{a}\int_0^x g(t)\,\mathrm{sh}(a(x-t))\,dt$$

C. Le cas $q \leqslant 0$

On suppose dans cette partie que q est une fonction négative.

7. Résoudre explicitement le cas où q est une constante, égale à $-\omega^2$ (où $\omega \in \mathbb{R}$).

On revient au cas général, où q est une fonction quelconque (toujours négative !). Soit y est une solution de (E).

8. Montrer que la fonction y^2 est convexe.

9. Montrer que si y possède deux zéros distincts, alors elle est nulle.

10. Montrer que si y est bornée, alors elle est nulle.

Soit y_0 un nombre réel strictement positif et soit y la solution de (E) qui satisfait $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.

11. Montrer que la fonction y est minorée par la constante y_0, et qu'elle est convexe.

12. On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $\omega > 0$ tel que $q(t) \leqslant -\omega^2$ pour tout nombre réel t. Trouver la solution Y satisfaisant $\begin{cases} Y'' - \omega^2 Y = 0, \\ Y(0) = y_0, \\ Y'(0) = 0, \end{cases}$ et montrer que, pour tout t, $y(t) \geqslant Y(t)$.
On pourra utiliser le résultat de la question 6.

D. Le cas $q > 0$

D-I. Théorème de comparaison de Sturm

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, y et z deux fois dérivables telles que

$$y''(t) + f(t)y(t) = 0 \text{ et } z''(t) + g(t)z(t) = 0.$$

On suppose que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.

Soient a et b deux zéros consécutifs de y. Sans perte de généralité, on suppose y strictement positive sur $]a, b[$. Notre but est de démontrer qu'alors z s'annule entre a et b.

On suppose par l'absurde que z ne s'annule pas sur $[a, b]$ (supposons-la strictement positive sur $[a, b]$). On note $w(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$.

13. Calculer w' et en déduire le sens de variation de w.

14. Démontrer que $y'(a) > 0$ et que $y'(b) < 0$. Quel est alors le signe de $w(a)$ et $w(b)$? En déduire une contradiction.

Ainsi, z s'annule sur $[a, b]$.

D-II. Application au cas $q > 0$

On suppose désormais que q est une fonction strictement positive.

15. Résoudre explicitement le cas où q est une constante, égale à $+\omega^2$.

On suppose désormais que q n'est plus constante, mais qu'il existe $\omega > 0$ et $\varphi > 0$ tels que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\omega^2 < q(t) < \varphi^2$. On note y une solution de (E).

16. Démontrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et que, si α et β sont deux zéros consécutifs de y, $\dfrac{\pi}{\varphi} \leqslant |\beta - \alpha| \leqslant \dfrac{\pi}{\omega}$.