MPSI 1

Mathématiques DS 06

Samedi 3 février – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de deux problèmes : un d'algèbre (structures algébriques et matrices) et un d'analyse (continuité/dérivabilité/convexité).
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
Le soin apporté à la copie est un paramètre qui sera pris en compte dans l'évaluation.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fautive, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage! ♪

Problème 1. Anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, groupe $SL_2(\mathbb{Z})$

Correction

D'après le début de Centrale MP 2004

On rappelle que quel que soit n dans $\mathbb{N}^*$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau, de neutre pour $+$ noté 0_n (la matrice carrée nulle), de neutre pour $\times$ noté I_n (la « matrice identité », diagonale avec des 1 sur la diagonale).

A. Déterminant d'une matrice

On note, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(A) = ad - bc$.

- Démontrer que pour toutes (A, B) dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.

Correction

Soient A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (c\alpha + d\gamma)(a\beta + b\delta) \\ &= a\alpha c\beta + a\alpha d\delta + b\gamma c\beta + b\gamma d\delta - c\alpha a\beta - c\alpha b\delta - d\gamma a\beta - d\gamma b\delta \\ &= a\alpha d\delta + b\gamma c\beta - c\alpha d\beta - d\gamma a\beta. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \det(A)\det(B) &= (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \\ &= ad\alpha\delta - ad\beta\gamma - bc\alpha\delta + bc\beta\gamma = \det(AB). \end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

- Que vaut $\det(I_2)$? Démontrer que, si $A \in GL_2(\mathbb{R})$, $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Correction

On remarque que $\det(I_2) = 1$. Ainsi, si $A \in GL_2(\mathbb{R})$, alors $1 = \det(I_2) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$.

Ainsi, $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

- L'application $\det$ est-elle...

- un morphisme d'anneaux de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +, \times)$?
- un morphisme de groupes de $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$?

Correction

Non, le déterminant n'est pas un morphisme d'anneaux ! En effet,

$$\det(I_2) = 1$$

mais $I_2 = E_{11} + E_{22}$ (où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), et

$$\det(E_{11}) + \det(E_{22}) = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, $\det$ ne préserve pas l'addition.

En revanche, on a montré à la question 1 qu'il s'agissait d'un morphisme de groupes.

B. L'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices carrées à 2 lignes et à 2 colonnes, à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

4. Justifier assez rapidement que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un anneau.

Correction

. Déjà, $I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

. Ensuite, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, alors

- $A - B = \begin{pmatrix} a - \alpha & b - \beta \\ c - \gamma & d - \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
- $A \times B = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Ainsi, $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc un anneau.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Démontrer que A est inversible, **d'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$** si, et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Correction

Attention ! On parle vraiment d'inverse **dans** $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Alors

$$A \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_2$$

Ainsi,

- **si** $\det(A) = \pm 1$, alors $A \times \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = I_2$, et $\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, donc A est inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

- si A est inversible d'inverse dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, alors $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$. Mais $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont dans $\mathbb{Z}$, donc ce sont des inversibles de $\mathbb{Z}$, donc $\det(A) = \pm 1$.

On note $GL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On note $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de déterminant 1.

6. Vérifier que $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.

Correction

On remarque que $SL_2(\mathbb{Z}) = \ker(\det)$, donc $SL_2(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.

7. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. À titre d'exemple, déterminer l'ensemble des matrices de $SL_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{pmatrix}$.

Correction

On remarque que

$$\exists (c, d), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) = 1 \Leftrightarrow \exists (c, d) ad - bc = 1 \Leftrightarrow a \wedge b = 1.$$

Ensuite, on cherche l'ensemble des (c, d) tels que $3d - 5c = 1$. On remarque que $2 \times 3 - 1 \times 5 = 1$, donc, si $(c, d) \in \mathbb{Z}^2$,

$$3d - 5c = 1 \Leftrightarrow 3d - 5c = 3 \times 2 - 5 \times 1 \Leftrightarrow 3(d - 2) = 5(c - 1).$$

Si $3(d - 2) = 5(c - 1)$, alors 3 divise $c - 1$, donc $c - 1 = 3k$. Ainsi, $d - 2 = 5k$. Donc $c = 3k + 1$ et $d = 5k + 2$. Réciproquement, un tel c et un tel d fonctionnent. L'ensemble des couples solution est

$$\{(3k + 1, 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$$

C. Générateurs de $SL_2(\mathbb{Z})$

On note $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Vérifier que S et T sont bien dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Calculer S^2 , T^2 .

Correction

On remarque que S et T sont bien à coefficients entiers, et que $\det(S) = \det(T) = 1$.

Ensuite, $S^2 = -I_2$ et $T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Vérifier que $\varphi : \begin{cases} (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (SL_2(\mathbb{Z}), \times) \\ t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ est un morphisme de groupes et en déduire, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, T^n .

Correction

Soient x et y dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\varphi(x)\varphi(y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \varphi(x+y)$$

Donc φ est bien un morphisme de groupes.

Ainsi, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$T^n = \varphi(1)^n = \varphi(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, que valent SM , MS , $T^n M$, MT^n ?

Correction

On calcule !

$$SM = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}, \quad MS = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}.$$

et, de même,

$$T^n M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+cn & b+dn \\ c & d \end{pmatrix}, \quad MT^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & an+b \\ c & cn+d \end{pmatrix}.$$

Le but de cette partie est de démontrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T , c'est-à-dire que toute matrice M de $SL_2(\mathbb{Z})$ peut s'écrire comme produit de puissances (positives ou négatives) de S et de T . En d'autres termes, on veut écrire que

$$\forall M \in SL_2(\mathbb{Z}), \exists N \in \mathbb{N}, \exists (a_1, \dots, a_{2N}) \in \mathbb{Z}^N, M = S^{a_1} T^{a_2} S^{a_3} T^{a_4} \dots S^{a_{2N-1}} T^{a_{2N}}.$$

Soit M dans $SL_2(\mathbb{Z})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

On suppose momentanément que $c = 0$.

11. Démontrer alors qu'il existe m dans $\mathbb{Z}$ tel que $M = T^m$ ou qu'il existe m dans $\mathbb{Z}$ tel que $M = S^2 T^m$.

Correction

On sait que $c = 0$, donc $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Mais $ad = 1$, donc $a = d = 1$ ou $a = d = -1$.

Ainsi,

- si $M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $M = T^b$.
- si $M = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M = -\begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^2 T^{-b}$.

On revient au cas général, c est supposé non nul. M est toujours égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

12. Démontrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que la matrice $ST^p M$ est de la forme $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ avec $|c'| < |c|$.
On pourra faire une division euclidienne.

Correction

Écrivons la division euclidienne de a par c : $a = cq + r$ avec $0 \leq r < |c|$. Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cq + r & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Mais alors,

$$T^{-q} M = \begin{pmatrix} cq + r - cq & b - dq \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & b - dq \\ c & d \end{pmatrix},$$

donc $ST^{-q} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ r & b - dq \end{pmatrix}$, qui est de la forme désirée!

13. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots, p_n$ des entiers relatifs tels que $ST^{p_n} ST^{p_{n-1}} \dots ST^{p_1} M$ ait un coefficient en bas à gauche qui soit nul, puis que M s'écrit comme un produit de puissances des matrices S et T .

Correction

On réitère le procédé, pour obtenir à chaque fois une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, avec $|c_{n+1}| < |c_n|$, tant que $|c_n| \neq 0$. La suite d'entiers décroît strictement tant qu'elle n'est pas nulle, donc c_n est nulle à partir d'un certain rang!

On en déduit que $ST^{p_n} ST^{p_{n-1}} \dots ST^{p_1} M$ est de la forme de la question 11., donc égale à $S^2 T^m$ pour un certain m . Ainsi,

$$ST^{p_n} ST^{p_{n-1}} \dots ST^{p_1} M = S^2 T^m,$$

donc

$$M = T^{-p_1} S^{-1} T^{-p_2} S^{-1} \dots T^{-p_n} S^{-1} S^2 T^m,$$

donc M s'écrit comme un produit de puissances de S et de T !

14. À titre d'exemple, écrire la matrice $\begin{pmatrix} 19 & 8 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ comme produit de puissances de S et T .

Correction

- On a $19 = 2 \times 7 + 5$, donc $T^{-2}M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, et $ST^{-2}M = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.
- $-7 = -2 \times 5 + 3$, donc $T^2ST^{-2}M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, et $ST^2ST^{-2}M = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
- $-5 = -2 \times 3 + 1$, donc $T^2ST^2ST^{-2}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, et ${}^1ST^2ST^2ST^{-2}M = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- $-3 = -3 \times 1 + 0$, donc $T^3ST^2ST^2ST^{-2}M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$.

On a alors :

$$M = T^2S^{-1}T^{-2}S^{-1}T^{-2}S^{-1}T^3$$

et comme $S^{-1} = -S = S^2$,

$$M = -T^2ST^{-2}ST^{-2}ST^3 = S^2T^2ST^{-2}ST^{-2}ST^3$$

Problème 2. Équation de Sturm-Liouville**Correction**

D'après Polytechnique PC 1997

Le but du problème est l'étude qualitative des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0, \quad (\text{E})$$

où q est une fonction continue, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle solution de (E) toute fonction y définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, qui vérifie $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, pour tout nombre réel t .

On admettra sans démonstration le résultat suivant, appelé « Théorème de Cauchy linéaire » : pour tous nombres réels t_0, y_0, y_1 , il existe une unique solution y de (E) qui satisfait,

$$y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = y_1.$$

En particulier, si y est une solution de (E) telle que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors y est la solution identiquement nulle !

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f est positive (resp. négative) si elle vérifie $f(t) \geq 0$ (resp. $f(t) \leq 0$) pour tout nombre réel t .

On dira qu'un nombre réel t est un zéro d'une fonction f si $f(t) = 0$.

A. Principe des zéros isolés

On veut démontrer la propriété suivante :

Proposition 1

Soit y une solution non identiquement nulle de (E), soit α un zéro de y . Alors α est *isolé*, c'est-à-dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout t dans $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \setminus \{\alpha\}$, $y(t) \neq 0$.

On dit que α est un zéro *isolé*, car, justement, c'est le seul zéro de y dans un certain intervalle.

Supposons, par l'absurde, que α ne soit pas isolé.

1. En niant le fait que α est isolé, démontrer que l'on peut trouver une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que :

- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $t_n \neq \alpha$,
- pour tout n dans $\mathbb{N}$, $y(t_n) = 0$,
- $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

Correction

Comme α n'est pas isolé, alors

$$\forall \eta > 0, \exists t \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta], t \neq \alpha \text{ et } y(t) = 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Prenons $\eta = \frac{1}{2^n}$. Alors on dispose de $t_n \in [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$ tel que $t_n \neq \alpha$ et $y(t_n) = 0$.

Ainsi, $|t_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, d'où $t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $y(t_n) = 0$.

2. Justifier que l'on peut même supposer la suite précédente strictement monotone.

Correction

C'est une question plus délicate ! Déjà, on va montrer qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de y telle que $|t_n - \alpha|$ soit strictement décroissante et tende vers 0.

Pour ce faire, on construit la suite par récurrence, en prenant $\eta_0 = 1$, t_0 dans $[\alpha - \eta_0, \alpha + \eta_0]$ tel que $y(t_0) = 0$.

Ensuite, si t_n est construite, on prend $\eta_{n+1} = \min\left(\frac{1}{2^{n+1}}, |\alpha - t_n|\right)$. Ainsi, on a t_{n+1} tel que $t_{n+1} \neq \alpha$, $|\alpha - t_{n+1}| < |\alpha - t_n|$ et $|\alpha - t_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

Maintenant, ou bien une infinité des $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à gauche, ou bien une infinité à droite de α . On appelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite extraite de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui a tous ses termes d'un côté. Cette suite est strictement monotone, et est une suite de zéros de f convergeant vers α .

Sans perte de généralité, on suppose $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante : $t_0 < t_1 < \dots$.

3. Démontrer que $y'(\alpha) = 0$ et aboutir à une contradiction.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction y est continue sur $[t_n, t_{n+1}]$, dérivable sur $]t_n, t_{n+1}[$, $y(t_n) = y(t_{n+1}) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, on dispose de $s_n \in]t_n, t_{n+1}[$ tel que $y'(s_n) = 0$. On a ainsi construit une suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de y' telle que $t_n < s_n < t_{n+1}$, donc, par théorème d'encadrement, telle que $s_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$.

Par continuité de y' , $y'(s_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y'(\alpha)$. Ainsi, $y'(\alpha) = y'(\alpha) = 0$. Par le théorème de Cauchy linéaire, y est donc la solution nulle, absurde !

Autre manière de faire (qui ne nécessite pas la stricte monotonie de $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$) : on sait que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{y(t_n) - y(\alpha)}{t_n - \alpha} = 0,$$

donc, comme y est dérivable en α , $\frac{y(t_n) - y(\alpha)}{t_n - \alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y'(\alpha)$, donc $y'(\alpha) = 0$.

Ainsi, comme les zéros de y sont isolés, cela a du sens de parler de « deux zéros consécutifs » de y .

B. Résultats préliminaires

B-I. Fonctions convexes

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, convexe et positive. On suppose que f a deux zéros t_1, t_2 et que $t_1 < t_2$. Montrer que f est nulle sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

Correction

Soit $x \in]t_1, t_2[$. Par l'inégalité des pentes, on sait que

$$\frac{f(x) - f(t_1)}{x - t_1} \leq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1},$$

donc, comme $f(t_1) = f(t_2) = 0$, $\frac{f(x)}{x - t_1} \leq 0$, donc $f(x) \leq 0$. Comme f est positive, on en déduit que $f(x) = 0$. Ainsi, f est bien nulle sur $[t_1, t_2]$.

5. Montrer que toute fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante.

Correction

Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Supposons que f ne soit pas constante. Alors on dispose de $t_1 < t_2$ tels que $f(t_1) \neq f(t_2)$.

- si $f(t_1) < f(t_2)$, alors, par inégalité des pentes, pour $x > t_2$,

$$\frac{f(x) - f(t_1)}{x - t_1} \geq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} > 0,$$

donc

$$f(x) \geq f(t_1) + (x - t_1) \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc f n'est pas majorée !

- si $f(t_1) > f(t_2)$, alors, par inégalité des pentes, pour $x < t_1$,

$$\frac{f(t_1) - f(x)}{t_1 - x} \leq \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} < 0,$$

donc

$$f(x) \geq f(t_1) + (t_1 - x) \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty,$$

donc f n'est pas majorée !

Dans tous les cas, on aboutit à une absurdité. Donc f est constante !

B-II. Un résultat technique

6. Soit $a > 0$, φ une fonction $\mathcal{C}^2$, telle que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $g = \varphi'' - a^2\varphi$. Démontrer que

$$\varphi(x) = \frac{1}{a} \int_0^x g(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt$$

Correction

Calculons

$$\int_0^x g(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt = \int_0^x (\varphi''(t) - a^2\varphi(t)) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt = \int_0^x \varphi''(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt - a^2 \int_0^x \varphi(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt$$

Or, par IPP (en intégrant $\varphi''(t)$ et en dérivant $\operatorname{sh}(a(x-t))$), on obtient,

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi''(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt &= [\varphi'(t) \operatorname{sh}(a(x-t))]_0^x + a \int_0^x \varphi'(t) \operatorname{ch}(a(x-t)) dt \\ &= a \int_0^x \varphi'(t) \operatorname{ch}(a(x-t)) dt \end{aligned}$$

En refaisant une IPP,

$$a \int_0^x \varphi'(t) \operatorname{ch}(a(x-t)) dt = [a\varphi(t) \operatorname{ch}(a(x-t))]_0^x + a^2 \int_0^x \varphi(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt = a\varphi(x) + a^2 \int_0^x \varphi(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt$$

Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt &= \int_0^x \varphi''(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt - a^2 \int_0^x \varphi(t) \operatorname{sh}(a(x-t)) dt \\ &= a\varphi(x), \end{aligned}$$

d'où le résultat.

C. Le cas $q \leq 0$

On suppose dans cette partie que q est une fonction négative.

7. Résoudre explicitement le cas où q est une constante, égale à $-\omega^2$ (où $\omega \in \mathbb{R}$).

Correction

Si q est constante, alors l'équation devient $y'' - \omega^2 y = 0$, dont l'ensemble des solutions est, par le cours

$$\{t \mapsto \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

On revient au cas général, où q est une fonction quelconque (toujours négative!). Soit y est une solution de (E).

8. Montrer que la fonction y^2 est convexe.

Correction

Comme y est une solution de (E), elle est deux fois dérivable. Ainsi, $z = y''$ l'est aussi, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $z'(t) = 2y(t)y'(t)$, donc

$$z''(t) = 2y'(t)^2 + 2y(t)y''(t) = 2y'(t)^2 - q(t)y(t)^2 \geq 0,$$

car q est une fonction positive. Donc y'' est positive, donc y est convexe.

9. Montrer que si y possède deux zéros distincts, alors elle est nulle.

Correction

Si y possède deux zéros distincts, y^2 est convexe, positive, et s'annule deux fois, donc est nulle par la partie préliminaire.

10. Montrer que si y est bornée, alors elle est nulle.

Correction

Si y est bornée, y^2 aussi, donc y^2 est convexe et bornée, donc est constante, par la partie préliminaire. Mais, si y est constante, alors elle est solution de $q(t)y(t) = 0$ pour tout t . Comme q est non nulle en au moins deux points, y a au moins deux zéros distincts, donc elle est nulle.

Soit y_0 un nombre réel strictement positif et soit y la solution de (E) qui satisfait $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$.

11. Montrer que la fonction y est minorée par la constante y_0 , et qu'elle est convexe.

Correction

On sait que $z = y^2$ est convexe, donc z' est croissante. Or, $z'(0) = 2y(0)y'(0) = 0$, donc z est décroissante puis croissante. Ainsi, z est minorée par y_0^2 . Donc $|y|$ est minorée

par y_0 . En particulier, elle ne s'annule pas.
 Or, y est continue, donc de signe constant (si elle changeait de signe, par le Théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annulerait). Comme $y(0) = y_0 > 0$, y est donc toujours strictement positive. Donc y est minorée par y_0 .
 Ainsi, $y'' = -qy$ est aussi toujours positive, donc y est convexe.

- 12.** On suppose de plus qu'il existe un nombre réel $\omega > 0$ tel que $q(t) \leq -\omega^2$ pour tout nombre réel t . Trouver la solution Y satisfaisant
- $$\begin{cases} Y'' - \omega^2 Y = 0, \\ Y(0) = y_0, \text{ et montrer que, pour tout } t, \\ Y'(0) = 0, \end{cases}$$
- $y(t) \geq Y(t)$.
 On pourra utiliser le résultat de la question 6.

Correction

(On suppose donc que $|q(t)| \geq \omega^2$.) On sait que l'on dispose de λ et μ tels que pour tout t dans $\mathbb{R}$,

$$Y(t) = \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}.$$

Comme $Y(0) = y_0$, $\lambda + \mu = y_0$. Comme $Y'(0) = 0$, $\lambda - \mu = 0$. Ainsi,

$$Y(t) = y_0 \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} = y_0 \operatorname{ch}(\omega t).$$

De plus,

$$(y - Y)'' = y'' - Y'' = -q(t)y(t) - \omega^2 Y \geq \omega^2(y(t) - Y(t)).$$

Donc, si $\varphi = y - Y$, $\varphi'' \geq \omega^2 \varphi$.

Par le résultat de la question 6., on sait alors que

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x g(t) \operatorname{sh}(\omega(x-t)) dt, \text{ où } g = \varphi'' - \omega^2 \varphi.$$

Si $x > 0$, comme $x - t \geq 0$, cette quantité est positive ! Si $x < 0$, comme $x - t < 0$ mais que les bornes 0 et x ne sont pas dans le bon sens, la quantité est aussi positive !

Dans tous les cas, on en déduit que φ est positive, donc que $y \geq Y$!

D. Le cas $q > 0$ **D-I. Théorème de comparaison de Sturm**

Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, y et z deux fois dérivables telles que

$$y''(t) + f(t)y(t) = 0 \text{ et } z''(t) + g(t)z(t) = 0.$$

On suppose que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.

Soient a et b deux zéros consécutifs de y . Sans perte de généralité, on suppose y strictement positive sur $]a, b[$. Notre but est de démontrer qu'alors z s'annule entre a et b .

On suppose par l'absurde que z ne s'annule pas sur $[a, b]$ (supposons-la strictement positive sur $[a, b]$). On note $w(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t)$.

13. Calculer w' et en déduire le sens de variation de w .

Correction

Dérivons!

$$w' = y'z' + yz'' - y''z - y'z' = yz'' - y''z = -gyz + fyz = (f - g)yz.$$

Comme $f < g$ et que z et y sont positives sur $[a, b]$, w' est négatif, donc w' décroît.

14. Démontrer que $y'(a) > 0$ et que $y'(b) < 0$. Quel est alors le signe de $w(a)$ et $w(b)$? En déduire une contradiction.

Correction

On sait que pour tout $x \geq a$, $y(x) \geq 0$. Ainsi, $\frac{y(x) - y(a)}{x - a} = \frac{y(x)}{x - a} \geq 0$ si $x > a$. Donc

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0.$$

De plus, $f'(a) \neq 0$ car sinon, on aurait $f(a) = f'(a) = 0$, donc, par le théorème de Cauchy linéaire, f serait la fonction nulle!

De même, $f'(b) < 0$.

Mais alors

$$\begin{aligned} w(a) &= y(a)z'(a) - y'(a)z(a) = -y'(a)z(a) < 0, \\ \text{et } w(b) &= y(b)z'(b) - y'(b)z(b) = -y'(b)z(b) > 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit le fait que w soit décroissante!

Ainsi, z s'annule sur $[a, b]$.

D-II. Application au cas $q > 0$

On suppose désormais que q est une fonction strictement positive.

15. Résoudre explicitement le cas où q est une constante, égale à $+\omega^2$.

Correction

NB : répondre à cette question uniquement, cela s'appelle du grapillage : je mettrai très peu de points... L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\{t \mapsto A \sin(\omega t + \gamma), (A, \gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$$

Remarquez que j'ai choisi cette forme-ci, en prévision de la localisation des points d'annulation (cf. question suivante).

On suppose désormais que q n'est plus constante, mais qu'il existe $\omega > 0$ et $\varphi > 0$ tels que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\omega^2 < q(t) < \varphi^2$. On note y une solution de (E).

- 16.** Démontrer que y s'annule une infinité de fois sur $\mathbb{R}$ et que, si α et β sont deux zéros consécutifs de y , $\frac{\pi}{\varphi} \leq |\beta - \alpha| \leq \frac{\pi}{\omega}$.

Correction

On note E_ω , E_φ les équations $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' + \varphi^2 y = 0$.

Soit z_ω une solution de E_ω . Alors, comme $\omega^2 < q(t)$, alors entre deux zéros de z_ω , il y a au moins un zéro de y . Or, il y a une infinité de zéros de z_ω , tous espacés de $\frac{\pi}{\omega}$ (les points d'annulation du sinus). Ainsi, il y a une infinité de zéros de y , tous espacés de, au plus, $\frac{\pi}{\omega}$.

La dernière inégalité est délicate ! Par le même argument que précédemment, toute solution de E_φ Si on avait $|\beta - \alpha| < \frac{\pi}{\varphi}$, si on posait ε la demi-différence de ces deux quantités, alors, en prenant la fonction $h : t \mapsto \sin(\alpha + \varphi t - \varepsilon)$, h serait solution de l'équation $h'' + \varphi^2 h = 0$, mais n'aurait aucun zéro entre β et α ! Ceci est absurde ! Donc

$$\frac{\pi}{\varphi} \leq |\beta - \alpha|.$$