MPSI 1

Mathématiques
DS 05

Samedi 13 janvier – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est constitué de deux problèmes : un d'analyse et un d'algèbre.
- Le sujet est **long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

En début de copie, merci d'indiquer votre objectif personnel pour ce devoir.

Problème 1. Théorème de Sarkovskii

« *Period Three implies chaos*[1] »

Soit I un intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$, n un entier.

- Si $k \in \mathbb{N}$, on note $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$ avec par convention $f^0 = \mathrm{Id}_{\mathrm{I}}$.
- Un point x de I est dit **de période** n si $f^n(x) = x$ et pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, $f^k(x) \neq x$.

Nous allons démontrer le théorème de Sarkovskii, qui s'énonce simplement sous cette forme :

Théorème 1

Si f est continue et admet un point de période 3, alors f admet un point de période n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

A. Questions préliminaires

1. On note
$$P : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}(x-2)(3x+1).$$
Représenter à main levée le graphe de P et vérifier que 0 est un point de période 3 de P.

2. Si I est un segment $[a, b]$ et $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ est continue, démontrer que f admet un point fixe.

3. Si $f : \mathrm{I} \to \mathrm{I}$ est continue, si α et β sont deux points de I et $[\alpha, \beta] \subset f([\alpha, \beta])$, démontrer que f admet un point fixe dans $[\alpha, \beta]$.

B. Un lemme utile

Notre but est de montrer le lemme suivant

Lemme 2

Soit f une fonction continue de I dans I, soit $K = [\alpha, \beta]$ un segment de I. On suppose que $K \subset f(\mathrm{I})$. Alors il existe $(c, d) \in \mathrm{I}^2$ tels que $K = f([c, d])$.

On se donne donc une fonction f continue de I dans I et $K = [\alpha, \beta]$ un segment de I non réduit à un point ($\alpha < \beta$). On suppose que $K \subset f(\mathrm{I})$.

4. Justifier qu'il existe $(a, b) \in \mathrm{I}^2$ tels que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

On suppose, pour éviter de multiplier les cas à traiter, que $a < b$**.**

5. Soit $A = \{x \in [a, b], f(x) = \beta\}$. Justifier l'existence de $v = \min A$. On considère de même $u = \max B$ où $B = \{x \in [a, v], f(x) = \alpha\}$.

6. Illustrer par un dessin clair la situation et démontrer que $K = f([u, v])$.

1. J. Yorke, T-Y. Li, *Period Three Implies Chaos*, American Mathematical Monthly 82 (1975), 985-992.

C. Preuve du théorème

On suppose que f est continue sur I (toujours à valeurs dans I) et admet un point $a \in \mathrm{I}$ de période 3. On note $b = f(a)$ et $c = f(b)$. On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$. Les points a, b, c sont deux à deux distincts, étant donné que a est de période 3.
Il faudrait traiter plusieurs cas, mais **nous allons nous focaliser sur le cas** $a < b < c$**.** On note $J = [a, b]$ et $K = [b, c]$.

C-I. Une suite de segments

7. Démontrer que $K \subset f(J)$, que $J \subset f(K)$ et que $K \subset f(K)$.

8. Démontrer qu'il existe une suite de segments $(L_0, \dots, L_{n-2})$ vérifiant

$$L_0 = K \text{ et } \forall i \in [\![1, n-2]\!],\ f(L_i) = L_{i-1},$$

vérifiant $L_{n-2} \subset L_{n-3} \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0$ et, pour tout i dans $[\![0, n-2]\!]$, $f^i(L_i) = K$.

9. Démontrer que $J \subset f^{n-1}(L_{n-2})$.
En déduire l'existence de $L_{n-1} \subset L_{n-2}$ tel que $f^{n-1}(L_{n-1}) = J$.

10. De même, démontrer qu'il existe $L_n \subset L_{n-1}$ vérifiant $f^n(L_n) = K$.

C-II. Fin de la preuve

11. Montrer que f^n admet au moins un point fixe dans L_n. On notera x_0 l'un de ces points fixes.

12. Montrer que $x_0 \notin \{b, c\}$.

13. Conclure que x_0 est de période n.

Problème 2. L'équation de Pell-Fermat

Mathématiques indiennes et européennes.

Soit $\omega \in \mathbb{N}^*$, qui ne soit pas le carré d'un entier. Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation de Pell-Fermat :

$$a^2 - \omega b^2 = 1, \qquad (PF_\omega)$$

d'inconnues a et b dans $\mathbb{Z}$. On nomme S_ω l'ensemble des solutions :

$$S_\omega = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a^2 - \omega b^2 = 1\}.$$

On remarque que $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont solutions triviales de (PF_ω) : on appellera **solution non triviale** de (PF_ω) toute solution différente de $(1,0)$ et $(-1,0)$. On note enfin

$$G_\omega = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ a^2 - \omega b^2 = 1 \text{ ou } a^2 - \omega b^2 = -1\}.$$

1. Établir l'identité de Brahmagupta (mathématicien indien, 598-670) : pour tous a, b, c, d entiers relatifs,

$$(a^2 - \omega b^2)(c^2 - \omega d^2) = (ac + \omega bd)^2 - \omega(ad + bc)^2.$$

A. Étude d'un anneau

On définit

$$\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}] = \left\{a + \sqrt{\omega} b,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

3. Démontrer que, sous l'hypothèse « ω n'est pas le carré d'un entier », on a $\sqrt{\omega} \notin \mathbb{Q}$.

4. Démontrer que tout élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$ s'écrit de manière unique sous la forme $a + \sqrt{\omega} b$.

On définit, pour $s = a + \sqrt{\omega} b \in \mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$, la norme de s, par $\mathcal{N}(s) = a^2 - \omega b^2$.

5. Montrer que pout tous s et t de $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$, $\mathcal{N}(st) = \mathcal{N}(s)\mathcal{N}(t)$.

6. Montrer que pour tout s de $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$, s est inversible pour la loi $\times$ si, et seulement si $\mathcal{N}(s) = 1$ ou $\mathcal{N}(s) = -1$. Exprimer le cas échéant l'inverse de s pour $\times$.

On rappelle que l'on note $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}])$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$ inversibles pour $\times$; $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]), \times)$ est un groupe.

7. Montrer que l'équation (PF_ω) admet une solution non triviale si et seulement si $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}])$ n'est pas réduit à $\{-1, 1\}$.

B. Le groupe de Brahmagupta de l'ensemble des solutions

B-I. Une loi sur G_ω

On définit, pour (a,b) et (c,d) deux couples d'entiers, la loi $\star$ par

$$(a,b) \star (c,d) = (ac + \omega bd, ad + bc).$$

8. Démontrer que $\star$ est une loi de composition interne sur G_ω.

9. Montrer que $(G_\omega, \star)$ est un groupe, qu'il est abélien, et que S_ω est un sous-groupe de G_ω.

10. Démontrer que l'application φ qui à tout élément (a,b) de $(G_\omega, \star)$ associe $a + \sqrt{\omega} b$ est à valeurs dans $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]), \times)$, et qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes.

B-II. Structure de S_ω

Note pour la suite : attention à la notation « puissance » ! Si vous voyez écrit x^n, faites attention au fait que

- si x est un couple, $x=(a,b)$, alors on parle de la puissance n dans $(G_\omega,\star)$,
- si x est un élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{\omega}]$, $x=a+\sqrt{\omega}b$, alors on parle de la puissance n usuelle dans $\mathbb{R}$.

On va étudier un peu plus en détail la structure de l'ensemble des solutions, pour remarquer, et c'est assez formidable, que l'ensemble des solutions est, au signe près, engendré par un seul élément.

On suppose qu'il existe une solution non triviale au problème, que l'on notera (α,β). On considère alors

$$A=\{a+\sqrt{\omega}b,\ a\geqslant 0 \text{ et } \mathcal{N}(a+\sqrt{\omega}b)=1\} \text{ et } B=A\cap]1,+\infty[.$$

11. Démontrer que si $a+\sqrt{\omega}b\in B$, alors $a\geqslant 0$ et $b\geqslant 1$.
On pourra considérer $\dfrac{1}{a+\sqrt{\omega}b}$ *pour montrer qu'on ne peut pas avoir* $b<0$.

12. Démontrer que B est non vide et admet un plus petit élément. On le note ε. On dispose donc de $(a_0,b_0)\in\mathbb{N}^2$ tels que $\varepsilon=a_0+\sqrt{\omega}b_0$.

On appelle le couple (a_0,b_0) **solution fondamentale** de (PF_ω). Soit (x,y) une autre solution de (PF_ω) avec $x,y\geqslant 0$. On veut montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $(x,y)=(a_0,b_0)^n$. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas.

13. Démontrer qu'il existe k dans $\mathbb{N}$ tel que $\varepsilon^k<x+\sqrt{\omega}y<\varepsilon^{k+1}$.

14. Démontrer que $\dfrac{x+\sqrt{\omega}y}{\varepsilon^k}\in B$, et conclure en précisant toutes les solutions de (PF_ω).

B-III. Résolution dans le cas $\omega=2$

15. En étudiant tous les cas possibles, démontrer que $(3,2)$ est une solution fondamentale de (PF_2).

16. En déduire que l'ensemble des solutions de PF_2 est l'ensemble des éléments de la forme (a_n,b_n), $(a_n,-b_n)$, $(-a_n,b_n)$ et $(-a_n,-b_n)$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les suites définies par $a_0=1$, $b_0=0$ et que

$$\forall n\in\mathbb{N},\begin{cases}a_{n+1}=3a_n+4b_n,\\ b_{n+1}=2a_n+3b_n.\end{cases}$$

C. Existence d'une solution non triviale dans le cas général

Cette partie, plus délicate que le reste, est surtout là car je ne voulais pas juste admettre l'existence d'une solution non triviale à Pell-Fermat.
Bhāskara II (1114-1185), un autre mathématicien indien, a en fait trouvé une méthode, dite méthode chakravala (« chakra » signifie boucle/cercle), pour déterminer une solution, mais sans preuve. En prenant certaines de ses idées, et en formalisant mieux les choses, on va faire cette preuve.

On pourra utiliser le principe des tiroirs de Dirichlet :

- (première version) si $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est un $n+1$-uplet d'éléments d'un ensemble à n éléments, alors on dispose de $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$,
- (deuxième version) si $n < m$, si $(x_1, \dots, x_m)$ sont des éléments d'un ensemble E et que $E = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$, alors il existe $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, il existe k dans $[\![1, n]\!]$ vérifiant $i \neq j$ et $(x_i, x_j) \in F_k^2$.
  « *Si on range m chaussettes dans n tiroirs et m > n, alors il y a un tiroir contenant au moins deux chaussettes.* » Cela est aussi vrai si on prend un nombre infini de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (il existe alors un F_k qui contient une infinité de termes).

On munit $\mathbb{Z}^2$ de l'addition coordonnée par coordonnée : $(2, -4) + (3, 6) = (2+3, -4+6) = (5, 2)$. On admet qu'on a alors un groupe, de neutre $(0, 0)$.

17. Démontrer que l'application

$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R} \\ (a, b) \mapsto a + \sqrt{\omega} b \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes injectif.

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe deux couples différents (a, b) et (a', b') dans $[\![0, n]\!]^2$ vérifiant

$$|f(a, b) - f(a', b')| \leqslant \frac{1}{n}(1 + \sqrt{\omega}),$$

puis qu'il existe A_n et B_n deux entiers relatifs,vérifiant

$$|A_n| \leqslant n, \ |B_n| \leqslant n \text{ et } |A_n + \sqrt{\omega} B_n| \leqslant \frac{1}{n}(1 + \sqrt{\omega}).$$

Pour la première partie, on pourra utiliser le principe des tiroirs, en remarquant que si $(a, b) \in [\![0, n]\!]^2$, alors $0 \leqslant f(a, b) \leqslant n(1 + \sqrt{\omega})$ et en remarquant l'on peut découper $[0, n(1 + \sqrt{\omega})]$ en n^2 intervalles de longueur $\frac{1}{n}(1 + \sqrt{\omega})$.

19. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,

$$|A_n^2 - \omega B_n^2| \leqslant (1 + \sqrt{\omega})^2.$$

20. Démontrer que l'ensemble des valeurs prises par (A_n, B_n), i.e. $\{(A_n, B_n), \ n \in \mathbb{N}^*\}$, est infini.

21. En déduire qu'il existe un entier relatif c vérifiant $|c| \leqslant (1 + \sqrt{\omega})^2$ et tel que l'équation

$$x^2 - \omega y^2 = c \qquad (PF_\omega(c))$$

admette une infinité de solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
On pourra encore appliquer le principe des tiroirs...

22. En déduire qu'il existe deux couples d'entiers (x, y) et (x', y') dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$ vérifiant l'équation $(PF_\omega(c))$ ci-dessus, et tels que $x \equiv x'[c]$ et $y \equiv y'[c]$.
Oh, tiens, et si on faisait un principe des tiroirs ?

23. On note $\eta = x + \sqrt{\omega} y$, $\eta' = x' + \sqrt{\omega} y'$ et $\xi = \dfrac{\eta}{\eta'}$. Démontrer que $\xi \in \mathbb{Z}[\omega] \setminus \{-1, 1\}$ et en déduire l'existence d'une solution non triviale à (PF_ω) (l'équation du début du problème).