MPSI 1

Mathématiques
DS 04

Samedi 2 décembre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est constitué de deux exercices et d'un problème.
- Le sujet est **long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

En début de copie, merci d'indiquer votre objectif personnel pour ce devoir.

Exercice 1. *Une équation fonctionnelle*. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivable, vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x).$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable et démontrer qu'elle satisfait sur $\mathbb{R}_+^*$ une équation différentielle linéaire du second ordre **à coefficients non constants**.

Correction

Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = f(1/x)$. Ainsi, f' est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Donc f est deux fois dérivable, et pour tout $x > 0$,

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} f(x).$$

$\boxed{\text{Donc } f \text{ est solution de l'équation différentielle } y'' + \frac{1}{x^2} y = 0.}$

2. On note, pour tout t dans $\mathbb{R}$, $g(t) = f(\mathrm{e}^t)$. Démontrer que g est deux fois dérivable et qu'elle est solution d'une équation différentielle du second ordre **à coefficients constants.**

Correction

Pour tout $x > 0$, $f(x) = g(\ln(x))$. Ainsi, $f'(x) = \frac{1}{x} g'(\ln(x))$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x))$. Ainsi, comme $f''(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = 0$, on en déduit que

$$\forall x > 0,\ -\frac{1}{x^2} g'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g''(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} g(\ln(x)) = 0,$$

d'où

$$\forall x > 0,\ g''(\ln(x)) - g'(\ln(x)) + g(\ln(x)) = 0,$$

donc, comme $\ln$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{g''(t) - g'(t) + g(t) = 0.}$$

3. Démontrer que l'on dispose de deux constantes λ et μ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(x)\right)\right).$$

Correction

L'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente est $r^2 - r + 1 = 0$, de discriminant $1 - 4 = -3$, d'où deux solutions,

$$x_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

d'où deux constantes λ et μ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right).$$

D'où, comme $e^{\frac{\ln(x)}{2}} = \sqrt{x}$,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).}$$

4. En déduire l'ensemble des fonctions vérifiant $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ pour tout $x > 0$.

Correction

Analyse. Soit f une telle fonction. On sait que $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ donc on dispose de λ, μ tels que f soit comme ci-dessus. Or,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \\ &\quad + \sqrt{x}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2x}\lambda\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2x}\mu\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + \frac{\mu - \sqrt{3}\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{x}\right) &= \sqrt{x}\left(\frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1/x)\right) + \frac{\mu - \sqrt{3}\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1/x)\right)\right) \\ &= \sqrt{x}\left(\frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) - \frac{\mu - \sqrt{3}\lambda}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, comme $f'\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, en évaluant en $x = 1$, on trouve

$$\frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2} = \lambda, \text{ i.e. } \boxed{\lambda = \sqrt{3}\mu.}$$

Synthèse. Réciproquement, une telle solution fonctionne bien ! (le vérifier, mais oui, cela fonctionne !)

Exercice 2. *Moyenne AGH de trois réels*. Pour tous n dans $\mathbb{N}^*$ et $(a_1,\dots,a_n)$ n réels strictement positifs, on définit :

- la moyenne arithmétique de $(a_1,\dots,a_n)$ par $M(a_1,\dots,a_n)=\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}$,
- la moyenne géométrique de $(a_1,\dots,a_n)$ par $G(a_1,\dots,a_n)=(a_1\times\dots\times a_n)^{\frac{1}{n}}$,
- la moyenne harmonique de $(a_1,\dots,a_n)$ par $H(a_1,\dots,a_n)=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$.

A. Inégalités entre moyennes.

1. Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$. Développer $\dfrac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)$ et en déduire que $M(a^3,b^3,c^3)\geqslant G(a^3,b^3,c^3)$.

Correction

On calcule !

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2\right)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\left(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca\right)\\&=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)\\&=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-abc-ca^2\\&+ba^2+b^3+bc^2-ab^2-b^2c-cab\\&+ca^2+cb^2+c^3-cab-bc^2-c^2a\\&=a^3+b^3+c^3-3abc\end{aligned}$$

Ainsi, comme la quantité de départ est toujours positive, on en déduit que

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc,\ \text{ i.e. }\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a^3b^3c^3},\ \text{ soit }\ \boxed{M(a^3,b^3,c^3)\geqslant G(a^3,b^3,c^3).}$$

2. En déduire que

$$\forall(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*),\ G(x,y,z)\leqslant M(x,y,z)\text{ puis }\forall(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*),\ H(x,y,z)\leqslant G(x,y,z).$$

On pourra exprimer $H(x,y,z)$ à l'aide d'une certaine moyenne arithmétique $M(\alpha,\beta,\gamma)$.

Correction

Soit $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+^*)^3$. Alors en posant $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$, $c=\sqrt[3]{z}$ et par la question précédente, on a immédiatement $G(x,y,z)\leqslant M(x,y,z)$.
Ensuite,

$$H(x,y,z)=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{M\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)}\leqslant\frac{1}{G\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z}}}=\sqrt[3]{xyz}=\boxed{G(x,y,z)}$$

B. Étude de trois suites récurrentes.

Soient a, b et c trois réels tels que $0 < a < b < c$. On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $w_0 = c$ et, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = H(u_n, v_n, w_n),\ \ v_{n+1} = G(u_n, v_n, w_n),\ \ w_{n+1} = M(u_n, v_n, w_n).$$

3. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence.
Initialisation. Si $n = 0$, $0 < a < b < c$ donc $0 < u_0 < v_0 < w_0$.
Hérédité. Si $0 < u_n < v_n < w_n$, on sait que $0 < H(u_n, v_n, w_n) = u_{n+1}$, puis que $H(u_n, v_n, w_n) \leqslant G(u_n, v_n, w_n)$ donc $u_{n+1} \leqslant v_{n+1}$, puis que $G(u_n, v_n, w_n) \leqslant M(u_n, v_n, w_n)$ donc $v_{n+1} \leqslant w_{n+1}$, d'où l'hérédité.
Conclusion. Héréditaire et vraie au rang 0, la proposition est vraie pour tout entier naturel n par le principe de récurrence.
Remarque. L'inégalité entre u_n, v_n et w_n n'est pas déduite par récurrence, c'est juste la stricte positivité.

4. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction

Soit n dans $\mathbb{N}$. Étudions d'abord le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n}\frac{3}{\frac{1}{u_n}+\frac{1}{v_n}+\frac{1}{w_n}} = \frac{3}{1+\frac{u_n}{v_n}+\frac{u_n}{w_n}}$$

Or, $1 + \dfrac{u_n}{v_n} + \dfrac{u_n}{w_n} \leqslant 3$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ donc (u_n) est croissante.
Ensuite,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} - w_n = \frac{(u_n - w_n) + (v_n - w_n)}{3} \leqslant 0,$$

donc (w_n) est décroissante.

5. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, puis que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction

(u_n) est croissante et (w_n) est décroissante et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant w_n \leqslant w_0$ donc (u_n) est croissante majorée, donc elle converge. De même, (w_n) est décroissante et minorée par u_0 donc elle converge.
Ensuite, on sait que $w_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n + w_n}{3}$ donc $v_n = 3w_{n+1} - u_n - w_n$ donc, comme (w_{n+1}) est extraite de (w_n), (v_n) converge.

6. Démontrer que les trois suites précédentes convergent vers la même limite.

Correction

Si on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\ell'' = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n$, alors on sait par la question précédente que $\ell' = 3\ell'' - \ell - \ell''$, donc que $\ell'' = \dfrac{\ell + \ell'}{2}$.
On sait de même que $\ell \leqslant \ell' \leqslant \ell''$ donc $\dfrac{\ell' + \ell''}{2} \leqslant \ell'$ donc $\ell'' \leqslant \ell'$, donc $\ell'' = \ell'$ Donc $\ell = \dfrac{\ell' + \ell''}{2} = \ell'$. D'où l'égalité entre les 3 limites et le résultat !

Problème 1. Étude d'un opérateur intégral

On note $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application T sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ comme suite. Si f appartenant à $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $T(f)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = 1 - \int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2} dt.$$

$T(f)$ est donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple, si $f : x \mapsto 1 + x^2$, alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$T(f)(x) = 1 - \int_0^x \frac{t(1+t^2)}{1+t^2} dt = 1 - \int_0^x t dt = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

On note φ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

A. Questions préliminaires

1. Justifier que si $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors $T(f) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. T est donc une application de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction

L'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2} dt$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{xf(x)}{1+x^2}$. Elle est $\boxed{\text{dérivable donc continue}}$, donc $T(f)$ est $\boxed{\text{dérivable, donc continue}}$.

2. Démontrer que $T(\varphi) = \varphi$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} T(\varphi)(x) &= 1 - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= 1 - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[-2 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right]_0^x \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \boxed{\varphi(x).} \end{aligned}$$

B. Une suite de fonctions

On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ainsi : on se fixe une fonction f_0 de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on donne la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = T(f_n).$$

On se propose de montrer que si x est un réel fixé, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\varphi(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

B-I. Une suite auxilliaire

On définit, pour n dans $\mathbb{N}$, g_n par la relation $f_n = \varphi + (-1)^n g_n$.

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} g_n(t) dt.$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{1+t^2} g_n(t) dt &= (-1)^n \int_0^x \frac{t}{1+t^2} (\varphi - f_n(t)) dt \\ &= \boxed{(-1)^n \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \varphi(t) dt - (-1)^n \int_0^x f_n(t) dt.} \end{aligned}$$

Or, $\int_0^x \frac{t}{1+t^2} f(t)dt = 1 - T(f)(x)$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t}{1+t^2} g_n(t)dt &= (-1)^n \left(1 - T(\varphi)(x) - (1 - T(f_n)(x))\right)\\ &= (-1)^n (f_{n+1}(x) - \varphi(x))\\ &= (-1)^{n+1}(\varphi(x) - f_{n+1}(x))\\ &= \boxed{g_{n+1}(x)}\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

B-II. Une suite particulière

On se propose d'étudier un cas particulier $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de suite définie par la relation de récurrence précédente.
A cet effet, on définit la fonction g_0^* par $\forall x \in \mathbb{R}, g_0^*(x) = 1$ et la suite de fonctions $(g_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, g_{n+1}^*(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} g_n^*(t)dt$$

On pose alors, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n^* = \varphi + (-1)^n g_n^*.$$

4. Déterminer g_1^* et g_2^*.

Correction

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$g_1^*(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2).$$

De même,

$$\begin{aligned}g_2^*(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\ln(1+t^2)dt\\ &= \frac{1}{4}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\ln(1+t^2)dt\\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\ln(1+t^2)^2\right]_0^x\\ &= \frac{1}{8}\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, g_n^*(x) = a_n \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence sur n.
L'**initialisation** est évidente en posant $a_0 = 1$.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on dispose de $a_n \in \mathbb{R}$ vérifiant $g_n^*(x) = a_n \ln(1+x^2)^n$.
Alors

$$\begin{aligned}
g_{n+1}^*(x) &= \int_0^x \frac{t}{1+t^2} g_n^*(t)dt \\
&= a_n \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \ln(1+t^2)^n dt \\
&= \frac{a_n}{2} \int_0^x \frac{2t}{1+t^2} \ln(1+t^2)^n dt \\
&= \frac{a_n}{2} \left[\frac{1}{n+1} \ln(1+t^2)^{n+1}\right]_0^x \\
&= \boxed{\frac{a_n}{2(n+1)} \ln(1+x^2)^{n+1}.}
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{g_{n+1}^*(x) = a_{n+1} \ln(1+x^2)^{n+1}, \text{ où } a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)}}$$

D'où l'hérédité et le résultat ! (en fait, $a_n = \dfrac{1}{2^n n!}$).

6. Soit x un réel. Déterminer la limite de $g_n^*(x)$ puis de $f_n^*(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

On remarque que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$ (récurrence immédiate). Ainsi,

$$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant \frac{a_n}{2},$$

donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{a_0}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $\boxed{g_n^*(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.
Ainsi,

$$\boxed{f_n^*(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$$

B-III. Retour au cas général

Dans cette partie, f_0 est une fonction quelconque de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On fixe un réel positif a.
La fonction g_0 définie par $g_0 = f_0 - \varphi$ étant continue sur $[-a, a]$, **on admet** qu'elle est bornée : on dispose de m et M deux réels vérifiant : $\forall x \in [-a, a],\ m \leqslant g_0(x) \leqslant M$.

7. Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, a], m g_n^*(x) \leqslant g_n(x) \leqslant M g_n^*(x)$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence sur n.
L'**initialisation** est évidente car $g_0^*(x) = 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout t dans $[0, a]$, $mg_n^*(t) \leqslant g_n(t) \leqslant Mg_n^*(t)$.
Alors, pour tout t dans $[0, a]$, comme $t \geqslant 0$,

$$m\frac{t}{1+t^2}g_n^*(t) \leqslant \frac{t}{1+t^2}g_n(t) \leqslant M\frac{t}{1+t^2}g_n^*(t),$$

donc, si $x \in [0, a]$, $\boxed{\text{en intégrant l'inégalité entre 0 et } x}$, on obtient

$$\boxed{mg_{n+1}^*(x) \leqslant g_{n+1}(x) \leqslant Mg_{n+1}^*(x),}$$

d'où le résultat voulu !

8. A l'aide des résultats précédents, montrer que :

$$\forall x \in [-a, a], mg_n^*(x) \leqslant g_n(x) \leqslant Mg_n^*(x)$$

Correction

Déjà, si $x \in [0, a]$, comme on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$mg_n^*(x) \leqslant g_n(x) \leqslant Mg_n^*(x),$$

et que $g_n^*(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit, par encadrement, que $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ensuite, si $x \in [-a, 0]$, on peut reprendre la preuve précédente par récurrence. Cependant, dans l'hérédité, pour tout t dans $[-a, 0]$, comme $t \leqslant 0$, on a

$$\boxed{M\frac{t}{1+t^2}g_n^*(t) \leqslant \frac{t}{1+t^2}g_n(t) \leqslant m\frac{t}{1+t^2}g_n^*(t).}$$

Ensuite, si $x \in [-a, 0]$, en intégrant $\boxed{\text{entre } x \text{ et } 0}$, on obtient

$$-Mg_{n+1}^*(x) \leqslant -g_{n+1}(x) \leqslant -mg_{n+1}^*(x),$$

d'où le résultat en multipliant par -1. Par encadrement, on en déduit que $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

9. En déduire que, pour tout réel x, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi(x)$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Soit $a > 0$ tel que $x \in [-a, a]$. Alors on a montré que $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\boxed{f_n(x) = \varphi(x) + (-1)^n g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi(x).}$$

C. Valeurs propres et vecteurs propres de T

C-I. Une équation aux valeurs propres

On se propose à présent de déterminer les fonctions φ_λ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non nulles et les réels λ non nuls tels que :

$$T(\varphi_\lambda) = \lambda\varphi_\lambda. \tag{E_λ}$$

10. Montrer que si une fonction φ_λ satisfait à (E_λ) alors elle satisfait à l'équation différentielle :

$$\lambda y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0 \tag{D_λ}$$

Correction

On sait que $F(\varphi_\lambda) = \lambda\varphi_\lambda$. Donc, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$1 - \int_0^x \frac{t\varphi_\lambda(t)}{1+t^2}dt = \lambda\varphi_\lambda,$$

donc, en dérivant par rapport à x (on voit que le membre de gauche est dérivable, donc le membre de droite aussi), on obtient

$$-\frac{x}{1+x^2}\varphi_\lambda(x) = \lambda\varphi_\lambda'(x),$$

donc

$$\boxed{\lambda\varphi_\lambda'(x) + \frac{x}{1+x^2}\varphi_\lambda(x) = 0.}$$

D'où φ_λ est solution de (D_λ).

11. Pour $\lambda \neq 0$, résoudre l'équation différentielle (D_λ) sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des solutions est de la forme $\{C\theta_\lambda,\ C \in \mathbb{R}\}$, où θ_λ est une fonction que l'on précisera.

Correction

L'équation (D_λ) est équivalente à

$$y' + \frac{x}{\lambda(1+x^2)}y = 0.$$

Or, une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{\lambda(1+x^2)}$ est $\dfrac{1}{2\lambda}\ln(1+x^2)$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\{x \mapsto C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\lambda}\ln(1+x^2)}, C \in \mathbb{R}\} = \boxed{\left\{x \mapsto \frac{C}{(1+x^2)^{\frac{1}{2\lambda}}},\ C \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}(\varphi^{\frac{1}{\lambda}}).}$$

12. Déterminer C de manière à ce que $C\theta_\lambda$ soit solution de (E_λ). En déduire que pour tout réel $\lambda \neq 0$ il existe une unique solution φ_λ non nulle de (E_λ) dont on donnera l'expression.

Correction

Soit $C \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{1}{2\lambda}}} &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^{1+\frac{1}{2\lambda}}}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[(-2\lambda)\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2\lambda}}}\right]_0^x \\ &= -\lambda\theta_\lambda(x)+\lambda.\end{aligned}$$

Ainsi, on a les équivalences

$$\begin{aligned}1 - C\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\theta_\lambda(t)dt = \lambda C\theta_\lambda &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ 1 - C(-\lambda\theta_\lambda(x)+\lambda) = \lambda C\theta_\lambda(x) \\ &\Leftrightarrow 1 - C\lambda = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Donc l'unique solution de (E_λ) est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{\lambda}\theta_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2\lambda}}}}$$

C-II. Convergence vers un vecteur propre

Pour $\lambda \neq 0$ on définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par $F_0 \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = \frac{1}{\lambda}T\left(F_n\right).$$

13. En reprenant la démarche de la partie B., montrer que, pour tout réel x, la suite numérique $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\varphi_\lambda(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction

Je pense que personne ne va faire cette question : si vous la faites, je regarderai bien en détail, mais l'idée est de poser G_n tel que $F_n = \varphi_\lambda + (-1)^n G_n$, de vérifier que $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}G_n(t)dt$, de prendre G_n^* la suite G_n mais initialisée à $G_0 = 1$, et de montrer ainsi, par encadrement, que $G_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout x.