MPSI 1

Mathématiques
DS 03

Vendredi 10 novembre – 8h-11h

- Durée : 3 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est constitué de deux calculs d'intégrale et, ensuite, d'un seul problème. Cependant, les parties sont très indépendantes.
- Le sujet est **long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Trois calculs d'intégrales*.

1. Donner une primitive de

$$f : \left| \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x)\cos(x) + \cos(x)^2 + \tan(x) \end{array} \right. .$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\mathrm{ch}(t)dt$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt$.

Problème 1. Fonctions périodiques

Définitions et notations

- Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est dite T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
- Une fonction est dite périodique si elle admet une période $T \in \mathbb{R}_+^*$.
- On note, pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des fonctions T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

But du problème Ce problème est constitué autour de parties assez indépendantes, toutes autour de la notion de fonctions périodiques. La partie A. s'intéresse aux propriétés algébriques des fonctions périodiques. La partie B. s'intéresse particulièrement à l'ensemble des périodes d'une fonction périodique, à sa structure et à ses propriétés, aboutissant à des résultats intéressants (notamment permettant de parler de « plus petite période » pour une fonction continue non constante). La partie C. permet d'étudier des liens entre périodicité et intégrales.

A. Structure de l'ensemble

Dans cette section, on fixe $T \in \mathbb{R}_+^*$. Le but de cette section est de montrer quelques propriétés algébriques de l'ensemble des fonctions T-périodiques. Seule la question 4. sera utile par la suite. Tout le reste sert uniquement à tester votre compréhension des définitions du cours du chapitre 5 !

1. Démontrer que pour toutes f et g dans $\mathcal{F}_T$, pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont dans $\mathcal{F}_T$.
2. Démontrer qu'aucun élément de $\mathcal{F}_T$ n'est injectif.
3. Donner un exemple d'élément de $\mathcal{F}_T$ qui soit surjectif.
4. Soit x dans $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un unique couple (k, α) dans $\mathbb{Z} \times [0, T[$, vérifiant $x = \alpha + kT$.
5. Démontrer que pour toute f dans $\mathcal{F}_T$, $f([0, T[) = f(\mathbb{R})$.
6. Démontrer que pour toute f dans $\mathcal{F}_T$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est ou bien vide, ou bien contient une infinité d'éléments.
7. Démontrer que l'application

$$\mathcal{R} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{F}_T \to \mathbb{R}^{[0,T[} \\ f \mapsto f_{|[0,T[} \end{array} \right.$$

est une bijection. On explicitera sa bijection réciproque. Que cela signifie-t-il avec des mots en français ?

B. Ensemble des périodes d'une fonction

Une partie A de $\mathbb{R}$ est appelée **sous-groupe** de $\mathbb{R}$ si :

- $0 \in A$,
- $\forall (x, y) \in A^2,\ x + y \in A$,
- $\forall x \in A,\ -x \in A$.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble des périodes de f par

$$\mathrm{per}(f) = \{T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}.$$

Par exemple, 0, 2π, -2π, 8π, etc. sont des périodes de cos.

Enfin, on note, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$. Par exemple, $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

B-I. Généralités

8. Démontrer que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{per}(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

9. En déduire que pour tout élément T de $\mathrm{per}(f)$, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $nT \in \mathrm{per}(f)$.

10. Démontrer que $\mathrm{per}(\cos) = 2\pi\mathbb{Z}$ $\big(= \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\big)$.

B-II. Sous-groupes de $\mathbb{R}$

On va démontrer un résultat remarquable sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$: ou bien ils sont denses dans $\mathbb{R}$, ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (comme l'ensemble des périodes de cos). Soit A un sous-groupe de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$. On note $B = A \cap \mathbb{R}_+^*$.

11. Démontrer que B admet une borne inférieure. On la note α. Expliquer pourquoi $\alpha \geqslant 0$.

12. Rappeler la caractérisation avec des ε de la borne inférieure.

Cas où $\alpha = 0$.

13. Dans le cas où $\alpha = 0$, démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a dans A vérifiant $0 < a \leqslant \varepsilon$.

14. En s'inspirant de la preuve par « sauts de puce » de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, démontrer qu'alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Cas où $\alpha > 0$. On suppose désormais que $\alpha > 0$. On suppose, par l'absurde, que $\alpha \notin A$.

15. Démontrer qu'il existe x et y dans A vérifiant $\alpha < x < y \leqslant \dfrac{3\alpha}{2}$.

16. En déduire qu'il existe un élément h de A vérifiant $0 < h \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et conclure que $\alpha \in A$.

On a donc démontré que $\alpha \in A$.

17. Démontrer alors que $A = \alpha\mathbb{Z}$.
On remarquera que l'inclusion réciproque est simple. Pour l'inclusion directe, si, par l'absurde, on prend $x \in A$ et $x \notin \alpha\mathbb{Z}$, on pourra utiliser une méthode similaire à celle de la question 4.

On a donc démontré la propriété suivante : si A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$,

- ou bien $A = \{0\}$ (mais c'est un cas inintéressant).
- ou bien A est dense dans $\mathbb{R}$,
- ou bien il existe $\alpha > 0$ vérifiant $A = \alpha\mathbb{Z}$ (et alors $\alpha = \inf A \cap \mathbb{R}_+^*$).

B-III. Retour sur l'ensemble des périodes

Dans cette partie, on admet le résultat suivant : Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant : $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$. Alors f et g sont égales.

18. Soit f une fonction continue, qui est 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique. Démontrer que f est constante.

19. Soit f une fonction continue, périodique, non constante. Montrer que f admet une plus petite période strictement positive.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, périodiques, non constantes. Si $f \in \mathcal{H}$, on note $p(f)$ sa plus petite période strictement positive. Par exemple $p(\sin) = 2\pi$. On définit sur $\mathcal{H}$ la relation $\lessapprox$ par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{H},\ f \lessapprox g \Leftrightarrow (p(f) \leqslant p(g)) \text{ et } \forall x \in [0, p(f)],\ f(x) = g(x).$$

20. Démontrer que l'on définit alors une relation d'ordre sur $\mathcal{H}$. Est-elle totale ?

21. On note $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \max(0, \sin(x))$. Dessiner f et g. Déterminer la borne inférieure, pour la relation $\lessapprox$, de $\{f, g\}$.

C. Intégrales et fonctions périodiques

Soit $T > 0$. On note $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C-I. Une propriété du cours

22. Démontrer que si f est continue et T-périodique, alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

On étudie la réciproque de cette propriété : soit g une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt.$$

On pose $h : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} g(t)dt$.

23. Démontrer que h est dérivable, calculer sa dérivée et en déduire la périodicité de g.

C-II. Convolution

Soit $T > 0$ et f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodiques. On définit la convolution de f et g, notée $f * g$, par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_0^T f(t)g(x-t)dt.$$

On admet que si f et g sont continues, alors $f * g$ est aussi continue.

24. Pour $T = 2\pi$, calculer $\sin * \sin$.

25. Démontrer que si $(f,g) \in \mathscr{C}_T$, alors $f * g \in \mathscr{C}_T$.

26. Démontrer que pour toutes f et g dans $\mathscr{C}_T$, $f * g = g * f$.