MPSI 1

Mathématiques
DS 03

Vendredi 10 novembre – 8h-11h

- Durée : 3 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est constitué de deux calculs d'intégrale et, ensuite, d'un seul problème. Cependant, les parties sont très indépendantes.
- Le sujet est **long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice ou de partie.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Exercice 1. *Trois calculs d'intégrales.*

1. Donner une primitive de

$$f : \left| \begin{array}{l} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \\ \qquad x \mapsto \sin(x)\cos(x) + \cos(x)^2 + \tan(x) \end{array} \right. .$$

Correction

$\frac{1}{4}\left(2x + \sin(2x) - 2\cos^2(x) - 4\ln(\cos(x))\right)$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^x \sin(t)\mathrm{ch}(t)dt$.

Correction

$\frac{1}{2}(\sin(x)\sinh(x) - \cos(x)\cosh(x) + 1)$

3. Calculer $\int_0^1 \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}dt$.

Correction

$2\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{2}$.

Problème 1. Fonctions périodiques

Définitions et notations

- Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est dite T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$.
- Une fonction est dite périodique si elle admet une période $T \in \mathbb{R}_+^*$.
- On note, pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{F}_T$ l'ensemble des fonctions T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

But du problème Ce problème est constitué autour de parties assez indépendantes, toutes autour de la notion de fonctions périodiques. La partie A. s'intéresse aux propriétés algébriques des fonctions périodiques. La partie B. s'intéresse particulièrement à l'ensemble des périodes d'une fonction périodique, à sa structure et à ses propriétés, aboutissant à des résultats intéressants (notamment permettant de parler de « plus petite période » pour une fonction continue non constante). La partie C. permet d'étudier des liens entre périodicité et intégrales.

A. Structure de l'ensemble

Dans cette section, on fixe $T \in \mathbb{R}_+^*$. Le but de cette section est de montrer quelques propriétés algébriques de l'ensemble des fonctions T-périodiques. Seule la question 4. sera utile par la suite. Tout le reste sert uniquement à tester votre compréhension des définitions du cours du chapitre 5 !

1. Démontrer que pour toutes f et g dans $\mathcal{F}_T$, pour tous λ et μ dans $\mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ et $f \times g$ sont dans $\mathcal{F}_T$.

Correction

Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}_R$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$(\lambda f + \mu g)(x+T) = \lambda f(x+T) + \mu g(x+T) = \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x)$$

$\boxed{\text{Donc } \lambda f + \mu g \in \mathcal{F}_T.}$

2. Démontrer qu'aucun élément de $\mathcal{F}_T$ n'est injectif.

Correction

Soit $f \in \mathcal{F}_T$. Alors, comme $T \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \neq T$ et pourtant, $f(0) = f(T)$. Ainsi, f n'est pas injective.

3. Donner un exemple d'élément de $\mathcal{F}_T$ qui soit surjectif.

Correction

On pose f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \boxed{f(x) = \begin{cases} \tan(x) \text{ si } x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}}$$

Alors f est bien π-périodique et elle est surjective car tan est surjective de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
Si on pose ensuite $g : x \mapsto f\left(\dfrac{\pi x}{T}\right)$, alors g est bien T-périodique et est surjective.

4. Soit x dans $\mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe un unique couple (k, α) dans $\mathbb{Z} \times [0, T[$, vérifiant $x = \alpha + kT$.

Correction

Analyse. Soit (k, α) un tel couple. Alors comme $\alpha \in [0, T[$, on en déduit que

$$0 \leqslant x - kT < T,$$

ou encore que $kT \leqslant x < (k+1)T$. Ainsi, on en déduit que

$$k \leqslant \frac{x}{T} < k+1$$

Par caractérisation de la partie entière, on en déduit que $\boxed{k = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor.}$ On en déduit donc que $\boxed{\alpha = x - \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor T}$.

Synthèse. En posant $k = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ et $\alpha = x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$, on obtient le résultat voulu, en remontant les inégalités précédentes.

5. Démontrer que pour toute f dans $\mathcal{F}_T$, $f([0,T[) = f(\mathbb{R})$.

Correction

On montre le résultat par double inclusion.

- soit $y \in f([0,T[)$. Alors on dispose de x dans $[0,T[$ vérifiant $f(x) = y$. Comme $x \in [0,T[\subset \mathbb{R}$, $f(x) \in f(\mathbb{R})$.
- soit $y \in f(\mathbb{R})$. Alors on dispose de x dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = y$. Par la question précédente, on dispose de (k,α) dans $\mathbb{Z} \times [0,T[$ vérifiant $x = \alpha + kT$. Alors $f(x) = f(\alpha + kT) = f(\alpha)$.
  Ainsi, $y = f(\alpha)$ donc $y \in f([0,T[)$.

6. Démontrer que pour toute f dans $\mathcal{F}_T$, pour tout y dans $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ est ou bien vide, ou bien contient une infinité d'éléments.

Correction

Soit f dans $\mathcal{F}_T$, soit y dans $\mathbb{R}$.

- si $y \notin f(\mathbb{R})$ alors $f^{-1}(\{y\})$ est vide : la valeur y n'est pas atteinte par f.
- si $y \in f(\mathbb{R}) = f([0,T[)$, on dispose de $\alpha \in [0,T[$ vérifiant $f(\alpha) = y$. Mais alors pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $f(\alpha + kT) = y$. Ainsi,

$$\boxed{\{\alpha + kT, k \in \mathbb{Z}\} \subset f^{-1}(\{y\}),}$$

donc $f^{-1}(\{y\})$ est infini.

7. Démontrer que l'application

$$\mathcal{R} : \left| \begin{array}{l} \mathcal{F}_T \to \mathbb{R}^{[0,T[} \\ f \mapsto f_{|[0,T[} \end{array} \right.$$

est une bijection. On explicitera sa bijection réciproque. Que cela signifie-t-il avec des mots en français ?

Correction

On va déjà expliquer les choses avec les mains : dire que cette application est bijective, c'est dire qu'il suffit de connaître une fonction périodique sur $[0,T[$ pour la connaître sur tout $\mathbb{R}$. Il suffit donc de répéter la fonction tous les T pour la connaître sur tout $\mathbb{R}$.

On pose $\mathcal{P}$ définie ainsi. Si $f \in \mathbb{R}^{[0,T[}$, on $g = \mathcal{P}(f)$ par

$$g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f\left(x - \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor T\right) \end{array} \right.$$

On montre alors que $\mathcal{P}$ est la bijection réciproque de $\mathcal{R}$:

- $\mathcal{P}$ est bien à valeurs dans $\mathcal{F}_T$: en effet, si $f \in \mathbb{R}^{[0,T[}$ et si on note $g = \mathcal{P}(f)$, alors pour x réel, on a

$$g(x+T) = f\left(x+T-\left\lfloor\frac{x+T}{T}\right\rfloor T\right) = f\left(x+T-\left\lfloor\frac{x}{T}+1\right\rfloor T\right) = f\left(x+T-\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor T-T\right) = g(x),$$

  en admettant (pas très long à prouver) que pour tout réel t, $\lfloor t+1\rfloor = \lfloor t\rfloor + 1$.
- soit maintenant $f \in \mathbb{R}^{[0,T[}$. Alors si on note $g = \mathcal{P}(f)$, on a $\mathcal{R}(g) = g_{|[0,T[}$. Mais pour tout x dans $[0,T[$, $0 \leqslant \dfrac{x}{T} < 1$ donc $\left\lfloor\dfrac{x}{T}\right\rfloor = 0$. Ainsi, $g(x) = f(x)$. Donc $\mathcal{R}(g) = f$. Donc $\mathcal{R}\circ\mathcal{P} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{[0,T[}}$.
- soit enfin $f \in \mathcal{F}_T$. On note $g = \mathcal{P}\circ\mathcal{R}(f)$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$g(x) = f_{|[0,T[}\underbrace{\left(x-\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor T\right)}_{\in[0,T[} = f\left(x-\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor T\right) = f(x).$$

  Ainsi, $\mathcal{P}\circ\mathcal{R}(f) = f$, donc $\mathcal{P}\circ\mathcal{R} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}_T}$.

B. Ensemble des périodes d'une fonction

Une partie A de $\mathbb{R}$ est appelée **sous-groupe** de $\mathbb{R}$ si :

- $0 \in A$,
- $\forall (x,y) \in A^2$, $x+y \in A$,
- $\forall x \in A,\ -x \in A$.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble des périodes de f par

$$\mathrm{per}(f) = \{T \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)\}.$$

Par exemple, 0, 2π, -2π, 8π, etc. sont des périodes de cos.

Enfin, on note, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbb{Z} = \{k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$. Par exemple, $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

B-I. Généralités

8. Démontrer que si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{per}(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Correction

Déjà, $0 \in \mathrm{per}(f)$ car pour tout x réel, $f(x+0) = f(x)$.
Ensuite, soient T et T' dans $\mathrm{per}(f)$. Alors pour tout x réel,

$$\begin{aligned} f(x+T+T') &= f(x+T) \text{ car } f \text{ est } T'-\textit{priodique} \\ &= f(x) \text{ car } f \text{ est } T-\textit{priodique} \end{aligned}$$

Donc $T + T' \in \mathrm{per}(f)$.
Enfin, soit $T \in \mathrm{per}(f)$. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x - T) = f(x - T + T) = f(x)$, donc $-T$ est dans $\mathrm{per}(f)$.
Donc $\mathrm{per}(f)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

9. En déduire que pour tout élément T de $\mathrm{per}(f)$, pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $nT \in \mathrm{per}(f)$.

Correction

On démontre le résultat par récurrence (c'est une question cadeau !). Soit $T \in \mathrm{per}(f)$.
On montre que pour tout n dans $\mathbb{N}$, nT est une période de f.
L'**initialisation** est évidente car $0 \in \mathrm{per}(f)$.
Pour l'**hérédité**, soit n dans $\mathbb{N}$ tel que nT soit une période de f. Alors $(n+1)T = nT + T \in \mathrm{per}(f)$ car $\mathrm{per}(f)$ est stable par somme.
D'où l'hérédité et le résultat.
Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ nT \in \mathrm{per}(f)}$.
Maintenant, soit $n \in \mathbb{Z}_-$. Alors $-n \in \mathbb{N}$. Donc $(-n)T \in \mathrm{per}(f)$ par la proposition précédente, donc, par stabilité par passage à l'opposé, $\boxed{nT \in \mathrm{per}(f)}$.

10. Démontrer que $\mathrm{per}(\cos) = 2\pi\mathbb{Z}$ $\big(= \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\big)$.

Correction

Déjà, on sait que pour tout n dans $\mathbb{Z}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi n) = \cos(x)$, donc $\boxed{2\pi\mathbb{Z} \subset \mathrm{per}(\cos)}$.
Soit maintenant $T \in \mathrm{per}(\cos)$. Alors $\cos(T) = \cos(0) = 1$, donc $T \equiv 0[2\pi]$.
$\boxed{\text{Donc } T \in 2\pi\mathbb{Z}\text{, d'où l'inclusion réciproque et le résultat !}}$

B-II. Sous-groupes de $\mathbb{R}$

On va démontrer un résultat remarquable sur les sous-groupes de $\mathbb{R}$: ou bien ils sont denses dans $\mathbb{R}$, ou bien de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (comme l'ensemble des périodes de cos). Soit A un sous-groupe de $\mathbb{R}$ différent de $\{0\}$. On note $B = A \cap \mathbb{R}_+^*$.

11. Démontrer que B admet une borne inférieure. On la note α. Expliquer pourquoi $\alpha \geqslant 0$.

Correction

B est une partie non vide, minorée, de $\mathbb{R}$:

- B est minorée par 0 car $B \subset \mathbb{R}_+^*$.
- B est non vide car $A \neq \{0\}$, donc A possède un élément x_0 non nul. Si $x_0 > 0$, alors $x_0 \in B$. Si $x_0 < 0$, alors comme $-x_0 \in A$, $-x_0 \in B$.

Par la propriété de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$, on en déduit que B admet une borne inférieure.

12. Rappeler la caractérisation avec des ε de la borne inférieure.

Correction

$\alpha = \inf(B)$ revient à dire que α minore B et que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $b \in B$ vérifiant $\alpha \leqslant b \leqslant \alpha + \varepsilon$.

Cas où $\alpha = 0$.

13. Dans le cas où $\alpha = 0$, démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a dans A vérifiant $0 < a \leqslant \varepsilon$.

Correction

Par la caractérisation de la borne inférieure rappelée ci-dessus, si $\varepsilon > 0$, on dispose de a dans $B = A \cap \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\alpha \leqslant a \leqslant \varepsilon$. Comme $\alpha = 0$ et comme $a \neq 0$, on a le résultat voulu.

14. En s'inspirant de la preuve par « sauts de puce » de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, démontrer qu'alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Sans perte de généralité, on suppose $\mathrm{I} =]c, d[$ et $c > 0$. On prend $\varepsilon = \dfrac{d-c}{2}$. On considère

$$C = \{k \in \mathbb{N},\ ka \leqslant c\}.$$

Alors C est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car $0 \in C$, majorée par $\left\lfloor \dfrac{c}{a} \right\rfloor + 1$, donc elle admet un plus grand élément k_0. Alors

$$k_0 a \leqslant c < (k_0+1)a \leqslant k_0 a + \varepsilon < k_0 a + d - c \leqslant d,$$

donc $\boxed{(k_0+1)a \in]c, d[}$.
En généralisant au cas où $d < 0$, où $c < 0 < d$ et où I est un intervalle ouvert quelconque, on obtient la densité de A dans $\mathbb{R}$!

Cas où $\alpha > 0$. On suppose désormais que $\alpha > 0$. On suppose, par l'absurde, que $\alpha \notin A$.

15. Démontrer qu'il existe x et y dans A vérifiant $\alpha < x < y \leqslant \dfrac{3\alpha}{2}$.

Correction

C'est une question un peu délicate ! Par propriété de la borne inférieure, en prenant $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, on dispose de y vérifiant $\alpha < y \leqslant \alpha + \varepsilon = \dfrac{3\alpha}{2}$.
Ensuite, en prenant $\varepsilon' = \dfrac{y-\alpha}{2}$, on dispose de x dans A vérifiant $\boxed{\alpha < x \leqslant \alpha + \varepsilon < y}$!

16. En déduire qu'il existe un élément h de A vérifiant $0 < h \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et conclure que $\alpha \in A$.

Correction

On en déduit alors que $0 < y - x \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$. Comme A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, $y - x \in A$ et donc $y - x \in B$. Mais $y - x < \alpha = \inf(B)$, **absurde !** L'absurdité vient du fait qu'on a supposé $\alpha \notin A$.

On a donc démontré que $\alpha \in A$.

17. Démontrer alors que $A = \alpha\mathbb{Z}$.
On remarquera que l'inclusion réciproque est simple. Pour l'inclusion directe, si, par l'absurde, on prend $x \in A$ et $x \notin \alpha\mathbb{Z}$, on pourra utiliser une méthode similaire à celle de la question 4.

Correction

- déjà, soit $x \in \alpha\mathbb{Z}$. Alors on dispose de n dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = n\alpha$. Comme $\alpha \in A$ et que A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, par la même récurrence qu'à la question 9., on obtient que $n\alpha \in A$.
- soit maintenant $x \in A$. Alors on remarque que si on pose $k = \left\lfloor \dfrac{x}{\alpha} \right\rfloor$, alors $0 \leqslant x - k\alpha < \alpha$. Mais alors, si $x \neq k\alpha$, on a
  - $x - k\alpha \in A$ car A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$,
  - $0 < x - k\alpha$, donc, finalement, $x - k\alpha \in B$,
  - $x - k\alpha < \alpha = \inf(B)$.

  ABSURDE ! Ceci permet de conclure que, nécessairement, $\boxed{x = k\alpha}$.

D'où l'inclusion réciproque et l'égalité des deux ensembles !

On a donc démontré la propriété suivante : si A est un sous-groupe de $\mathbb{R}$,

- ou bien $A = \{0\}$ (mais c'est un cas inintéressant).
- ou bien A est dense dans $\mathbb{R}$,
- ou bien il existe $\alpha > 0$ vérifiant $A = \alpha\mathbb{Z}$ (et alors $\alpha = \inf A \cap \mathbb{R}_+^*$).

B-III. Retour sur l'ensemble des périodes

Dans cette partie, on admet le résultat suivant : Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant : $\forall x \in A,\ f(x) = g(x)$. Alors f et g sont égales.

18. Soit f une fonction continue, qui est 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique. Démontrer que f est constante.

Correction

Déjà, on remarque que f est constante sur $\mathrm{per}(f)$: en effet, pour tout T dans $\mathrm{per}(f)$, $f(T) = f(0)$. Il nous suffit donc de démontrer que $\mathrm{per}(f)$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Si ce n'était pas le cas, alors $\mathrm{per}(f)$ serait de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, avec $\alpha > 0$. Donc, comme 1 et $\sqrt{2}$ sont dans $\mathrm{per}(f)$, on en déduit que l'on dispose de n et de m deux entiers non nuls tels que $1 = n\alpha$ et $\sqrt{2} = m\alpha$. Mais alors $\boxed{\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{1} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}}$, ce qui est absurde !

(on sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
Donc $\boxed{\mathrm{per}(f) \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$ donc, par la propriété admise, et comme f est continue, f est constante.

19. Soit f une fonction continue, périodique, non constante. Montrer que f admet une plus petite période strictement positive.

Correction

Là, il faut réfléchir à ce qu'on a démontré précédemment. Montrer qu'il y a une plus petite période strictement positive, c'est montrer que le α qu'on a défini précédemment est > 0, donc, en fait, que $per(f)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$!
Par les questions précédentes, si on note $\alpha = \inf(\mathrm{per}(f) \cap \mathbb{R}_+^*)$, on a vu que ou bien $\alpha = 0$ et $\mathrm{per}(f)$ était dense dans $\mathbb{R}$, ou bien $\alpha > 0$ et alors $\mathrm{per}(f) = \alpha\mathbb{Z}$.
Or, f étant continue et périodique, si $\mathrm{per}(f)$ était dense dans $\mathbb{R}$, f serait constante. Donc $\mathrm{per}(f)$ est de la forme $\alpha\mathbb{Z}$, où

$$\boxed{\alpha = \inf(\mathrm{per}(f) \cap \mathbb{R}_+^*) = \min(\mathrm{per}(f) \cap \mathbb{R}_+^*),}$$

c'est-à-dire que α est la plus petite période strictement positive de f !

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, périodiques, non constantes. Si $f \in \mathcal{H}$, on note $p(f)$ sa plus petite période strictement positive. Par exemple $p(\sin) = 2\pi$. On définit sur $\mathcal{H}$ la relation $\lessapprox$ par

$$\forall (f,g) \in \mathcal{H},\ f \lessapprox g \Leftrightarrow (p(f) \leqslant p(g)) \text{ et } \forall x \in [0, p(f)],\ f(x) = g(x).$$

20. Démontrer que l'on définit alors une relation d'ordre sur $\mathcal{H}$. Est-elle totale ?

Correction

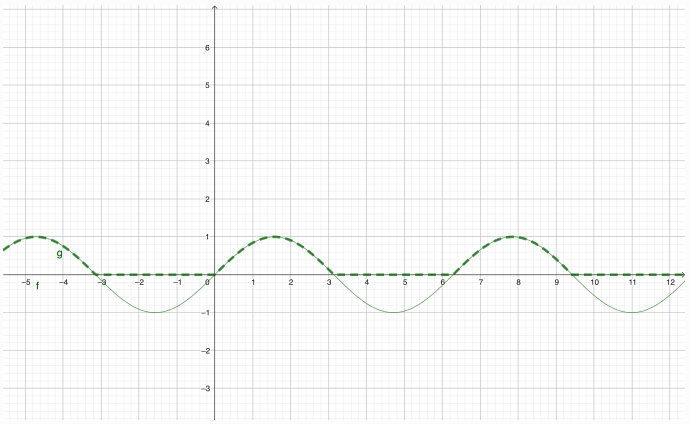
On montre que $\lessapprox$ est réflexive, antisymétrique et transitive !

- **réflexivité.** soit $f \in \mathcal{H}$. Alors $p(f) = p(f)$ et pour tout x dans $[0, p(f)]$, $f(x) = f(x)$...
- **antisymétrie.** soient f et g dans $\mathcal{H}$. On suppose $f \lessapprox g$ et $g \lessapprox f$. Alors $p(f) \leqslant p(g)$ et $p(g) \leqslant p(f)$, donc $p(f) = p(g)$ (on note T cette quantité). Ensuite, pour tout x dans $[0, T]$, $f(x) = g(x)$. Mais comme f et g sont T-périodiques, f et g sont égales sur tout $\mathbb{R}$ comme elles sont égales sur une période !
- **transitivité.** soient f, g et h trois fonctions de $\mathcal{H}$ vérifiant $f \lessapprox g$ et $g \lessapprox h$. Alors $p(f) \leqslant p(g) \leqslant p(h)$, donc $\boxed{p(f) \leqslant p(h)}$.
  De plus, si $x \in [0, p(f)]$, alors $f(x) = g(x)$, mais on a aussi $x \in [0, p(g)]$ donc $g(x) = h(x)$. Donc $\boxed{f(x) = h(x)}$.
  Donc $f \lessapprox h$.

21. On note $f : x \mapsto \sin(x)$ et $g : x \mapsto \max(0, \sin(x))$. Dessiner f et g. Déterminer la borne inférieure, pour la relation $\lessapprox$, de $\{f, g\}$.

Correction

On a les graphes suivants :



Trouver la borne inférieure de $\{f, g\}$, c'est trouver une fonction h qui est égale à f et à g sur un l'intervalle le plus grand possible.
Posons h la fonction égale à sin sur $[0, \pi]$ et répétée π-périodiquement ensuite. Alors

- $h \lessapprox f$ et $\lessapprox g$: en effet, $p(h) = \pi$, $p(f) = 2\pi$ et $p(g) = 2\pi$, et pour tout x dans $[0, \pi]$, $f(x) = g(x) = h(x) = \sin(x)$
- soit φ un autre minorant de f et de g. Alors pour tout x dans $[0, p(\varphi)]$, $\varphi(x) = f(x)$ et $\varphi(x) = g(x)$. Donc sur $[0, p(\varphi)]$, $f(x) = g(x)$ donc nécessairement, $p(\varphi) \leqslant \pi$. Mais alors, sue $[0, p(\varphi)]$, $\varphi(x) = \sin(x) = h(x)$. Donc $\boxed{\varphi \lessapprox h}$.

Ainsi, h est le plus grand des minorants de $\{f, g\}$, donc $h = \inf(\{f, g\})$.

C. Intégrales et fonctions périodiques

Soit $T > 0$. On note $\mathscr{C}_T$ l'ensemble des fonctions continues et T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

C-I. Une propriété du cours

22. Démontrer que si f est continue et T-périodique, alors pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Correction

On l'a fait dans le cours : soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{x+T} f(t)dt.$$

Dans la troisième intégrale, on effectue le changement de variables

- $s = t - T$, i.e. $t = s + T$,

- quand $t = T$, $s = 0$ et quand $t = x + T$, $s = x$,
- $f(t) = f(s + T) = f(s)$,
- $dt = ds$,

donc $\displaystyle\int_T^{x+T} f(t)dt = \int_0^x f(s)ds = \int_0^x f(t)dt$, car les variables sont muettes. Ainsi,

$$\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_x^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \boxed{\int_0^T f(t)dt}.$$

On étudie la réciproque de cette propriété : soit g une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_x^{x+T} g(t)dt = \int_0^T g(t)dt.$$

On pose $h : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} g(t)dt$.

23. Démontrer que h est dérivable, calculer sa dérivée et en déduire la périodicité de g.

Correction

On pose G une primitive de g. Alors pour tout x dans $\mathbb{R}$, $h(x) = G(x + T) - G(x)$. On en déduit, comme G est dérivable, que h l'est, et on remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = G'(x + T) - G'(x) = g(x + T) - g(x).$$

Mais h est constante par hypothèse, donc sa dérivée est nulle. On en déduit que $\boxed{\text{pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R},\ g(x + T) = g(x)}$. Donc g est périodique !

C-II. Convolution

Soit $T > 0$ et f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodiques. On définit la convolution de f et g, notée $f * g$, par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_0^T f(t)g(x - t)dt.$$

On admet que si f et g sont continues, alors $f * g$ est aussi continue.

24. Pour $T = 2\pi$, calculer $\sin * \sin$.

Correction

On calcule : si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sin * \sin(x) &= \int_0^{2\pi} \sin(t)\sin(x-t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin(t)\sin(x)\cos(t) - \sin(t)\cos(x)\sin(t)dt \\
&= \sin(x)\int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2}dt - \cos(x)\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)^2}{2}dt \\
&= 0 - \cos(x)\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{4}dt \text{ car } \cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t) \\
&= -\cos(x) \times \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

25. Démontrer que si $(f, g) \in \mathscr{C}_T$, alors $f * g \in \mathscr{C}_T$.

Correction

On admet déjà la continuité de $f * g$. Pour la périodicité, soit x dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f * g(x+T) = \int_0^T f(t)g(x+T-t)dt = \int_0^T f(t)g(x-t)dt = f * g(x).$$

D'où la T-périodicité.

26. Démontrer que pour toutes f et g dans $\mathscr{C}_T$, $f * g = g * f$.

Correction

Soit x dans $\mathbb{R}$. Alors $g * f(x) = \int_0^T g(t)f(x-t)dt$. On pose le changement de variables

- $s = x - t$, i.e. $t = x - s$.
- Quand $t = 0$, $s = x$; quand $t = T$, $s = x - T$,
- $g(t)f(x-t) = g(x-s)f(s)$,
- $dt = -ds$.

Ainsi, $g * f(x) = \int_x^{x-T} g(x-s)f(s)(-ds) = \int_{x-T}^x f(s)g(x-s)ds$. Mais la fonction $s \mapsto f(s)g(x-s)$ est T-périodique. Donc

$$\boxed{g * f(x) = \int_{x-T}^x f(s)g(x-s)ds = \int_0^T f(s)g(x-s)ds = f * g(x).}$$