MPSI 1

Mathématiques DS 02

Samedi 7 octobre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un problème constitué de questions de cours indépendantes, et d'un problème constitué de parties sur la trigonométrie, les complexes et les fonctions usuelles.
- Le sujet est **long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Les questions avec le cadre **COURS** sont des questions où il y a du cours brut à recracher (peut-être que la deuxième partie de la question demande de la réflexion, mais il y aura une partie de cours pur). Les questions avec le cadre **EXO** sont des questions qui sont **très proches** d'un exercice fait en cours. Cet indicateur doit vous inciter à vous lancer dans cette question en vous rappelant une méthode vue en classe.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fautive, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage! ♪

Problème 1. Le cours, le cours, le cours

Toutes les questions de ce problème sont indépendantes.

A. Cours brut

1. Si $z \in \mathbb{C}$. Définir e^z . Donner le module et un argument de e^z en fonction de z .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définir $\mathbb{U}_n$. Donner la valeur de $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.
3. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définir « f est périodique ».
4. Raconter le cours sur les fonctions puissances $x \mapsto x^a$: définition, ensemble de définition, prolongement éventuel, dérivabilité, allure des graphes en fonction des valeurs de a .

B. Exercices du cours

5. Écrire sous la forme $\rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.
6. Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$.
7. Déterminer le module et un argument de $z_3 = 1 - e^{i\frac{\pi}{7}}$.
8. Étudier la fonction $x \mapsto x^x$ et dessiner, à main levée, son graphe.

Problème 2. Théorème de Niven et entiers de Gauss

Ce problème est consacré au théorème de Niven, s'intéressant à la rationalité de $\cos(r\pi)$, $\sin(r\pi)$ et $\tan(r\pi)$, lorsque r est rationnel, ainsi qu'à ses applications. Il est constitué de quatre parties assez indépendantes.

La **partie A**, utilisant de la trigonométrie et des polynômes, s'attache à démontrer le théorème de Niven. Seuls les résultats des questions 6., 7., 8. et 9. seront utilisés pour la suite.

La **partie B** donne une application à une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$.

La **partie C**, très orientée « fonctions usuelles » et complètement indépendante des parties précédentes, donne une approximation rationnelle de π .

Enfin, la **partie D** est consacrée à l'étude algébrique et géométrique des entiers de Gauss.

On rappelle que l'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$, et que l'on a les deux définitions suivantes (équivalentes)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, \text{pgcd}(p, q) = 1 \right\}.$$

A. Théorème de Niven

A-I. Une suite de polynômes

On définit la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes comme suit : pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$P_0(z) = 2, P_1(z) = z \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2}(z) = zP_{n+1}(z) - P_n(z).$$

1. Calculer P_2 et P_3 .
2. **EXO** Démontrer que pour tout θ dans $\mathbb{R}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P_n(2 \cos(\theta)) = 2 \cos(n\theta)$.
3. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est de degré n , à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1.
4. *Cette question est indépendante des deux précédentes, elle sera juste utile pour la suite.*
Soit Q un polynôme de coefficient dominant égal à 1, à coefficients entiers : on suppose qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ tels que pour tout z dans $\mathbb{C}$, $Q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$.
Soit α une racine rationnelle de Q , disons $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Z}$.

A-II. Cosinus rationnels

Soit désormais $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$. On veut démontrer que $\cos(r\pi) = 0, \pm 1$ ou $-\frac{1}{2}$.

5. Démontrer alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P_n(2 \cos(r\pi)) - 2 = 0$, où $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite définie à la partie précédente.
6. En déduire que $2 \cos(r\pi) \in \{-2, -1, 1, 2\}$, puis en déduire le premier théorème de Niven :

$$\cos(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \cos(r\pi) = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \text{ ou } 1.$$

Ces valeurs $(\pm 1, 0 \text{ ou } \pm \frac{1}{2})$ sont-elle effectivement des valeurs atteintes en un réel de la forme $r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$?

A-III. Extension aux autres fonctions circulaires

On considère toujours r un rationnel (mais on ne suppose plus que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$).

7. **COURS** Exprimer $\sin(r\pi)$ comme le cosinus d'un angle. En déduire le second théorème de Niven

$$\sin(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \sin(r\pi) = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2} \text{ ou } 1.$$

Ces valeurs $(\pm 1, 0 \text{ ou } \pm \frac{1}{2})$ sont-elle effectivement des valeurs atteintes en un réel de la forme $r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$?

8. **COURS** Exprimer $\cos(2r\pi)$ à l'aide de $\tan(r\pi)$. En déduire le troisième théorème de Niven

$$\tan(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \tan(r\pi) = -1, 0 \text{ ou } 1.$$

Ces valeurs $(-1, 0 \text{ ou } 1)$ sont-elle effectivement des valeurs atteintes en un réel de la forme $r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$?

9. Soient r et s des rationnels. On suppose que $\text{Arctan}(r) = s\pi$. Démontrer que, nécessairement, il existe k dans $\mathbb{N}$ vérifiant $s = \frac{k}{4}$.

B. Une équation polynomiale

On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1 + iz)^n = (1 - iz)^n. \quad (1)$$

10. **EXO** Résoudre cette équation. On vérifiera que les solutions obtenues sont réelles.
On devra peut-être distinguer selon la parité de n .
11. Quand l'équation (1) a-t-elle des solutions rationnelles non nulles ?

C. Approximation de π par des rationnels

Dans cette partie, nous établissons une jolie identité pour approcher π .

12. **COURS** Dessiner le graphe de la fonction Arctan, en précisant les asymptotes, les valeurs en 0, 1 et -1 .
13. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

14. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx.$$

15. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $[0, 1]$, $0 \leq \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leq x^{2(n+1)}$, et en

déduire que $\frac{\pi}{4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

D. Entiers de Gauss

On appelle ensemble des entiers de Gauss l'ensemble appelé $\mathbb{Z}[i]$ et défini par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

D-I. Un lemme préliminaire

16. **EXO** Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib$. On note $\arg(z)$ l'argument principal de z . Montrer que $\arg(z) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$.

D-II. Propriétés algébriques

17. Démontrer que pour tous z et z' dans $\mathbb{Z}[i]$, $z - z'$, $z \times z'$ et $\bar{z}$ sont dans $\mathbb{Z}[i]$.

On note, si $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, $N(z) = a^2 + b^2$. Un élément z de $\mathbb{Z}[i]$ est dit inversible s'il existe z' dans $\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $zz' = 1$.

18. Démontrer qu'un élément z de $\mathbb{Z}[i]$ est inversible si et seulement si $N(z) = 1$. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

19. Soit z un élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$. On suppose qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $z^n \in \mathbb{R}$. Démontrer que nécessairement, $\arg(z) \equiv 0 \left[\frac{\pi}{4} \right]$.

On pourra distinguer les cas $\Re(z) > 0$, $\Re(z) = 0$, $\Re(z) < 0$ et utiliser des résultats précédents.

D-III. Propriétés géométriques

On va s'intéresser à l'existence de certaines figures que l'on peut tracer sur $\mathbb{Z}[i]$.

Angles entre des points de $\mathbb{Z}[i]$ Soient A , B et C trois points du plan, d'affixes respectives a , b et c que l'on suppose distinctes et dans $\mathbb{Z}[i]$. On suppose que l'angle $\widehat{ABC}$ est de la forme $r\pi$, où r est un nombre rationnel, et on veut montrer que $\widehat{ABC}$ est un multiple entier (relatif) de $\frac{\pi}{4}$.

On rappelle que toutes les transformations géométriques du type $z \mapsto \alpha z + \beta$, avec α dans $\mathbb{C}^*$ et β dans $\mathbb{C}$, sont des transformations qui préservent les angles.

20. **COURS** On note τ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z - b$. Quel type de transformation géométrique est τ ?

On note $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$ et $C_1(c_1)$ les images respectives de A , B et C par cette transformation. Dessiner les points A , B , C et A_1 , B_1 et C_1 .

21. **COURS** On note φ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\bar{a}_1 z$. Quel type de transformation géométrique est φ ?

On note $A_2(a_2)$, $B_2(b_2)$ et $C_2(c_2)$ les images respectives de A_1 , B_1 et C_1 par cette transformation φ .

Dessiner (sur le même dessin que la question 20. si possible!) les points A_2 , B_2 et C_2 .

22. Justifier que $\arg(c_2) = r\pi[2\pi]$, et que $c_2 \in \mathbb{Z}[i]$.

23. En déduire qu'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $r\pi \equiv 0 \left[\frac{\pi}{4} \right]$.

Polygones réguliers dans $\mathbb{Z}[i]$ On se demande désormais s'il existe des polygones réguliers dont les sommets sont des éléments de $\mathbb{Z}[i]$. On rappelle qu'un polygone est régulier si tous ses côtés sont de la même longueur. Il est alors inscrit dans un cercle.

Soit un tel polygone régulier à n côtés ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$), dont les sommets sont des éléments de $\mathbb{Z}[i]$. On note ses sommets $A_1, \dots, A_n$ (on tourne dans le sens trigonométrique).

24. Démontrer que si $i \in \llbracket 3, n \rrbracket$, alors l'angle $\widehat{A_1 A_i A_2}$ vaut $\frac{\pi}{2n}$ et conclure que $n = 4$.

25. Établir la réciproque du résultat prouvé précédemment.