MPSI 1

Mathématiques
DS 02

Samedi 7 octobre – 8h-12h

- Durée : 4 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé d'un problème constitué de questions de cours indépendantes, et d'un problème constitué de parties sur la trigonométrie, les complexes et les fonctions usuelles.
- Le sujet est **long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Les questions avec le cadre COURS sont des questions où il y a du cours brut à recracher (peut-être que la deuxième partie de la question demande de la réflexion, mais il y aura une partie de cours pur). Les questions avec le cadre EXO sont des questions qui sont **très proches** d'un exercice fait en cours. Cet indicateur doit vous inciter à vous lancer dans cette question en vous rappelant une méthode vue en classe.
- Prenez **10-15 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats** et **numérotez vos pages**.
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fausse, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♫ Bon courage ! ♫

Problème 1. Le cours, le cours, le cours

Toutes les questions de ce problème sont indépendantes.

A. Cours brut

1. Si $z \in \mathbb{C}$. Définir e^z. Donner le module et un argument de e^z en fonction de z.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définir $\mathbb{U}_n$. Donner la valeur de $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.

3. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définir « f est périodique ».

4. Raconter le cours sur les fonctions puissances $x \mapsto x^a$: définition, ensemble de définition, prolongement éventuel, dérivabilité, allure des graphes en fonction des valeurs de a.

B. Exercices du cours

5. Écrire sous la forme $\rho e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, les complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$.

Correction

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

6. Déterminer les racines carrées de $3 + 4i$.

Correction

On trouve $2 + i$ et $-2 - i$.

7. Déterminer le module et un argument de $z_3 = 1 - e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Correction

$1 - e^{i\frac{\pi}{7}} = e^{i\frac{\pi}{14}} \times (-2i) \sin\frac{\pi}{14} = 2\sin\frac{\pi}{14} e^{i\frac{\pi}{14} - i\frac{\pi}{2}}$. Donc, comme $\frac{\pi}{14} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que

$$|z_3| = 2\sin\frac{\pi}{14} \text{ et } \arg(z_3) = -\frac{3\pi}{7}[2\pi].$$

8. Étudier la fonction $x \mapsto x^x$ et dessiner, à main levée, son graphe.

Problème 2. Théorème de Niven et entiers de Gauss

Ce problème est consacré au théorème de Niven, s'intéressant à la rationnalité de $\cos(r\pi)$, $\sin(r\pi)$ et $\tan(r\pi)$, lorsque r est rationnel, ainsi qu'à ses applications. Il est constitué de quatre parties assez indépendantes.
La **partie A**, utilisant de la trigonométrie et des polynômes, s'attache à démontrer le théorème de Niven. Seuls les résultats des questions 6., 7., 8. et 9. seront utilisés pour la suite.
La **partie B** donne une application à une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$.
La **partie C**, très orientée « fonctions usuelles » et complètement indépendante des parties précédentes, donne une approximation rationnelle de π.
Enfin, la **partie D** est consacrée à l'étude algébrique et géométrique des entiers de Gauss.

On rappelle que l'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$, et que l'on a les deux définitions suivantes (équivalentes)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*,\ \text{pgcd}(p,q) = 1 \right\}.$$

A. Théorème de Niven

A-I. Une suite de polynômes

On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes comme suit : pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$P_0(z) = 2,\ P_1(z) = z \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(z) = zP_{n+1}(z) - P_n(z).$$

1. Calculer P_2 et P_3.

Correction

On calcule ! Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$P_2(z) = zP_1(z) - P_0(z) = z^2 - 2 \text{ et } P_3(z) = zP_2(z) - P_1(z) = z^3 - 2z - z = z^3 - 3z.$$

2. EXO Démontrer que pour tout θ dans $\mathbb{R}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta)$.

Correction

On montre le résultat par récurrence double sur n. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(2\cos(\theta)) = 2\cos(n\theta). \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. Pour $n = 0$, si $\theta \in \mathbb{R}$, $P_0(2\cos(\theta)) = 2 = 2\cos(0\theta)$. Pour $n = 1$, si $\theta \in \mathbb{R}$, $P_1(2\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)$.
Hérédité. Soit n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vraies. Démontrons $\mathcal{P}_{n+2}$. Soit θ dans

$\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} P_{n+2}(2\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)P_{n+1}(2\cos(\theta)) - P_n(2\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta) \times 2\cos((n+1)\theta)) - 2\cos(n\theta) \\ &= 2\left(2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\theta + (n+1)\theta\right) + \underbrace{\cos\left(\theta - (n+1)\theta\right) - \cos(n\theta)}_{=0}\right) \\ &= \boxed{2\cos((n+2)\theta)}, \end{aligned}$$

ce qui achève l'hérédité et qui démontre le résultat par le principe de récurrence.

3. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est de degré n, à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1.

Correction

On démontre aussi le résultat par récurrence !
L'**initialisation** est évidente car P_1 est de degré 1, à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1. De même, P_2 est de degré 2, à coefficients entiers et de coefficient dominant égal à 1.
Pour l'**hérédité**, soit n dans $\mathbb{N}$ tel que la proposition soit vraie aux rangs n et $n+1$. Alors pour tout z dans $\mathbb{C}$,

$$P_{n+2}(z) = zP_{n+1}(z) - P_n(z).$$

P_n est de degré n, P_{n+1} est de degré $n+1$ (par hypothèse de récurrence), donc $zP_{n+1}(z)$ est de degré $n+2$, degré strictement supérieur à celui de P_n. Donc le degré de $zP_{n+1}(z) - P_n(z)$ est égal à $n+2$.
De plus, P_{n+1} et P_n étant à coefficients entiers par hypothèse de récurrence, on en déduit que P_{n+2} aussi.
Son coefficient dominant est le coefficient devant z^{n+2}, qui est égal au coefficient devant z^{n+1} dans P_{n+1}, donc son coefficient dominant est égal à 1.
On a donc démontré l'hérédité et on en déduit le résultat par le principe de récurrence.

4. *Cette question est indépendante des deux précédentes, elle sera juste utile pour la suite.*
Soit Q un polynôme de coefficient dominant égal à 1, à coefficients entiers : on suppose qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ tels que pour tout z dans $\mathbb{C}$, $Q(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$.
Soit α une racine rationnelle de Q, disons $\alpha = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Correction

On suppose que $Q(\alpha) = 0$, donc

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

En multipliant par q^n, on en déduit que

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Mais q divise $a_{n-1}p^{n-1}q + a_{n-2}p^{n-2}q^2 + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$, donc $\boxed{q \text{ divise } p^n}$. Comme p et q sont premiers entre eux, on en déduit, par applications successives du théorème de Gauss, que q divise p, puis que, $\boxed{ncessairement, q = 1}$.

$\boxed{\text{Donc } \alpha \text{ est un entier !}}$

A-II. Cosinus rationnels

Soit désormais $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$. On veut démontrer que $\cos(r\pi) = 0$, ± 1 ou $-\frac{1}{2}$.

5. Démontrer alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $P_n(2\cos(r\pi)) - 2 = 0$, où $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la suite définie à la partie précédente.

Correction

Écrivons $r = \frac{p}{q}$ avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$. Alors en posant $\boxed{n = 2q}$, on obtient

$$P_n(2\cos(r\pi)) = 2\cos(nr\pi) = 2\cos(2qr\pi) = 2\cos(2p\pi) = 2.$$

Donc $\boxed{P_n(2\cos(r\pi)) - 2 = 0}$.

6. En déduire que $2\cos(r\pi) \in \{-2, -1, 1, 2\}$, puis en déduire le premier théorème de Niven :

$$\cos(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \cos(r\pi) = -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2} \text{ ou } 1.$$

Ces valeurs ($\pm 1, 0$ ou $\pm\frac{1}{2}$) sont-elle effectivement des valeurs atteintes en un réel de la forme $r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$?

Correction

Par la question 4., comme $2\cos(r\pi)$ est racine d'un polynôme à coefficients entiers et à coefficient dominant égal à 1, on en déduit que $2\cos(r\pi)$ est entier. Comme $2\cos(r\pi) \in [-2, 2]$, on en déduit que $\boxed{\cos(r\pi) = -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2} \text{ ou } 1}$. Réciproquement, si $\cos(r\pi)$ prend une de ces 5 valeurs, il est bien sûr rationnel !
Ces valeurs sont atteintes car

$$\cos(0\pi) = 1,\ \cos(\pi) = -1,\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2}.$$

A-III. Extension aux autres fonctions circulaires

On considère toujours r un rationnel (mais on ne suppose plus que $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$).

7. COURS Exprimer $\sin(r\pi)$ comme le cosinus d'un angle. En déduire le second théorème de Niven

$$\sin(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \sin(r\pi) = -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2} \text{ ou } 1.$$

Ces valeurs ($\pm 1, 0$ ou $\pm\frac{1}{2}$) sont-elle effectivement des valeurs atteintes en un réel de la forme $r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$?

Correction

Là, pour le coup, c'est quasi-immédiat. On sait que $\sin(r\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) = \cos(s\pi)$ en posant $s = \frac{1}{2} - r$.

Ainsi, si $\sin(r\pi)$ est rationnel, $\cos(s\pi)$ aussi, et donc $\cos(s\pi) \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Donc, comme $\sin(r\pi) = \cos(s\pi)$, $\sin(r\pi)$ est aussi dans cet ensemble !

La réciproque est immédiate.

Ces valeurs sont atteintes car

$$\sin(0\pi) = 0,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

8. COURS Exprimer $\cos(2r\pi)$ à l'aide de $\tan(r\pi)$. En déduire le troisième théorème de Niven

$$\tan(r\pi) \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \tan(r\pi) = -1,\ 0 \text{ ou } 1.$$

Ces valeurs ($-1, 0$ ou 1) sont-elle effectivement des valeurs atteintes en un réel de la forme $r\pi$ avec $r \in \mathbb{Q}$?

Correction

Enfin, $\cos(2r\pi) = 2\cos(r\pi)^2 - 1 = \dfrac{2}{1+\tan(r\pi)^2} - 1 = \dfrac{1-\tan(r\pi)^2}{1+\tan(r\pi)^2}$.

Ainsi, si $\tan(r\pi) \in \mathbb{Q}$, $\cos(2r\pi) \in \mathbb{Q}$, donc $\cos(2r\pi) = -1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}$ ou 1.

- Si $\cos(2r\pi) = 1$, alors en notant $t = \tan(r\pi)$, $1 - t^2 = 1 + t^2$ donc $t = 0$.
- Si $\cos(2r\pi) = -1$, alors $1 - t^2 = -1 - t^2$ donc $2 = 0$, absurde.
- Si $\cos(2r\pi) = 0$, alors $t^2 = 1$ donc $t = \pm 1$
- Si $\cos(2r\pi) = \dfrac{1}{2}$, alors $2(1-t^2) = 1 + t^2$ donc $3t^2 = 1$ donc $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, impossible car $t \in \mathbb{Q}$.
- Si $\cos(2r\pi) = -\dfrac{1}{2}$, alors $2(1-t^2) = -1 - t^2$ donc $t^2 = 3$ donc $t = \pm\sqrt{3}$, impossible car $t \in \mathbb{Q}$.

Donc, finalement, $t \in \{-1, 0, 1\}$.
La réciproque est évidente.
Ces valeurs sont atteintes car

$$\tan(0) = 0,\ \tan\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 1,\ \tan\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = -1.$$

9. Soient r et s des rationnels. On suppose que $\text{Arctan}(r) = s\pi$. Démontrer que, nécessairement, il existe k dans $\mathbb{N}$ vérifiant $s = \dfrac{k}{4}$.

Correction

Si $\text{Arctan}(r) = s\pi$, alors $r = \tan(s\pi)$. Donc, par la question 8., $\text{Arctan}(r) = -1$, 0 ou 1. Donc $\tan(s\pi) = -1$, 0 ou 1, donc $s\pi \equiv \pm\dfrac{\pi}{4}[\pi]$ ou $s\pi \equiv 0[\pi]$. Dans tous les cas, on peut dire que

$$\boxed{s\pi \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right],\ \text{i.e. } \exists k \in \mathbb{Z},\ s = \frac{k}{4}.}$$

B. Une équation polynomiale

On considère l'équation suivante, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(1+iz)^n = (1-iz)^n. \tag{1}$$

10. EXO Résoudre cette équation. On vérifiera que les solutions obtenues sont réelles.
On devra peut-être distinguer selon la parité de n.

Correction

Déjà, on remarque que $-i$ n'est pas solution. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i\}$. Alors on a les équivalences

suivantes

$$\begin{aligned}(1+iz)^n = (1-iz)^n &\Leftrightarrow \left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n \text{ car } 1-iz \neq 0.\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{1+iz}{1-iz} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ 1+iz = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - iz e^{\frac{2ik\pi}{n}}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ i(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1.\end{aligned}$$

Si n est impair, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ n'est jamais égal à -1, donc

$$\begin{aligned}(1+iz)^n = (1-iz)^n &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{i(1+e^{\frac{2ik\pi}{n}})}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ z = \frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}} - e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}{ie^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-\frac{ik\pi}{n}} + e^{\frac{ik\pi}{n}}\right)}\\ &\Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], z = \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right).\end{aligned}$$

Si n est impair, l'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\left\{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}}.$$

Au contraire, si n est pair, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est égal à 1 pour $k = n/2$. Ainsi, avec le même raisonnement que précédemment, si n est pair, l'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\left\{\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right),\ k \in [\![0, n-1]\!] \text{ et } k \neq \frac{n}{2}\right\}}.$$

11. Quand l'équation (1) a-t-elle des solutions rationnelles non nulles ?

Correction

Par le théorème de Niven, on sait que $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est rationnel si et seulement si $\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$, 1 ou -1. 0 est, bien sûr, toujours solution de l'équation.
Maintenant, il faut savoir à quelle condition 1 peut être solution de l'équation. On peut partir de $\tan\frac{k\pi}{n} = 1$ ou simplement remarquer que

$$(1 + i \times 1)^n = \sqrt{2}^n e^{n\frac{i\pi}{4}}$$

De même, $(1-i)^n = \sqrt{2}^n e^{-n\frac{i\pi}{4}}$. Ainsi, on a les équivalences

$$\begin{aligned}(1+i)^n = (1-i)^n &\Leftrightarrow \sqrt{2}^n e^{n\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}^n e^{-n\frac{i\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow e^{n\frac{i\pi}{2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow n \equiv 0[4].\end{aligned}$$

De même, -1 est solution de l'équation si et seulement si $n \equiv 0[4]$. Ainsi,

- si $n \equiv 0[4]$, (1) possède 2 solutions rationnelles non nulles : 1 et -1.
- sinon, comme les solutions de (1) sont des $\tan(r\pi)$ avec $r \in \mathbb{Q}$, et qu'elles ne peuvent pas être égales à 1 ou -1, on en déduit, par le théorème de Niven, qu'elles ne sont pas rationnelles.

C. Approximation de π par des rationnels

Dans cette partie, nous établissons une jolie identité pour approcher π.

12. COURS Dessiner le graphe de la fonction Arctan, en précisant les asymptotes, les valeurs en 0, 1 et -1.

13. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}$$

Correction

Dans l'égalité, il y a un terme que l'on sait calculer, c'est la somme !
Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} &= \sum_{k=0}^{n}(-x^2)^k \\ &= \frac{1-(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)} \text{ car } -x^2 \neq 1. \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}.\end{aligned}$$

D'où le résultat désiré.

14. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx.$$

Correction

On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 x^{2k}dx + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \text{ par linéarité.} \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left[\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx.}\end{aligned}$$

15. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, pour tout x dans $[0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leqslant x^{2(n+1)}$, et en déduire que $\dfrac{\pi}{4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0,1]$. Alors $1+x^2 \geqslant 1$ donc

$$0 \leqslant \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} \leqslant x^{2(n+1)}.$$

En intégrant l'inégalité entre 0 et 1,

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \leqslant \int_0^1 x^{2(n+1)}dx = \frac{1}{2(n+1)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit, par théorème d'encadrement, que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit donc que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

D. Entiers de Gauss

On appelle ensemble des entiers de Gauss l'ensemble appelé $\mathbb{Z}[i]$ et défini par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a+ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

D-I. Un lemme préliminaire

16. EXO Soient $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ et $z = a+ib$. On note $\arg(z)$ l'argument principal de z. Montrer que $\arg(z) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

Correction

C'est un exercice du cours ! En notant $\theta = \arg(z)$, on sait que $\dfrac{b}{a} = \tan(\theta)$. De plus, comme $a > 0$, on sait que $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit donc que $\theta = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

D-II. Propriétés algébriques

17. Démontrer que pour tous z et z' dans $\mathbb{Z}[i]$, $z-z'$, $z\times z'$ et $\overline{z}$ sont dans $\mathbb{Z}[i]$.

Correction

Soient z et z' dans $\mathbb{Z}[i]$. On note $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où $(a,b,a',b')\in\mathbb{Z}^4$. Alors

$$z-z'=(a-a')+i(b-b')\in\mathbb{Z}[i] \text{ car } a-a'\in\mathbb{Z} \text{ et } b-b'\in\mathbb{Z}.$$

De même,

$$z\times z'=(aa'-bb')+i(ab'+ba')\in\mathbb{Z}[i] \text{ car } aa'-bb'\in\mathbb{Z} \text{ et } ab'+ba'\in\mathbb{Z}.$$

Enfin, $\overline{z}=a-ib\in\mathbb{Z}[i]$.

On note, si $z=a+ib\in\mathbb{Z}[i]$, $N(z)=a^2+b^2$. Un élément z de $\mathbb{Z}[i]$ est dit inversible s'il existe z' $\boxed{\text{dans } \mathbb{Z}[i]}$ vérifiant $zz'=1$.

18. Démontrer qu'un élément z de $\mathbb{Z}[i]$ est inversible si et seulement si $N(z)=1$. En déduire l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

Correction

- Soit z un élément de $\mathbb{Z}[i]$, inversible. Alors on dispose de $z'\in\mathbb{Z}[i]$ vérifiant $zz'=1$. Or, $N(zz')=|zz'|^2=|z|^2|z'|^2=N(z)N(z')$. Donc $N(z)N(z')=1$, mais $N(z)$ et $N(z')$ sont deux entiers naturels, donc le produit vaut 1 : ils sont donc tous deux égaux à 1.
  Ainsi, $\boxed{N(z)=1}$.
- Réciproquement, si $z\in\mathbb{Z}[i]$ et $N(z)=1$, alors $|z|^2=1$, donc $z\overline{z}=1$. Donc z est inversible d'inverse $\overline{z}\in\mathbb{Z}[i]$.

Soit alors z un élément inversible de $\mathbb{Z}[i]$. Écrivons $z=a+ib$.
Par ce que l'on vient de faire, $N(z)=1$ donc $a^2+b^2=1$. Mais a^2 et b^2 sont deux entiers naturels, donc, nécessairement,

- $a=\pm1$ et $b=0$, i.e. $z=\pm1$
- ou bien $a=0$ et $b=\pm1$, i.e. $z=\pm i$.

Réciproquement, comme $1\times1=1$, comme $(-1)\times(-1)=1$, comme $i\times(-i)=1$ et $(-i)\times i=1$, les quatre complexes $(1,-1,i,-i)$ sont bien inversibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
$\boxed{\text{L'ensemble des éléments inversibles de } \mathbb{Z}[i] \text{ est donc } \{1,-1,i,-i\}.}$

19. Soit z un élément non nul de $\mathbb{Z}[i]$. On suppose qu'il existe n dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $z^n\in\mathbb{R}$. Démontrer que nécessairement, $\arg(z)\equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$.
On pourra distinguer les cas $\mathfrak{Re}(z)>0$, $\mathfrak{Re}(z)=0$, $\mathfrak{Re}(z)<0$ et utiliser des résultats précédents.

Correction

Notons $a = \mathfrak{Re}(z)$ et $b = \mathfrak{Im}(z)$.

- Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et $\arg(z) \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\arg(z) \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$.
- Si $a > 0$, alors $\arg(z) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$. Mais comme $z^n \in \mathbb{R}$, $n\arg(z) \equiv 0[\pi]$, donc on dispose de $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$\boxed{n\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) = k\pi}$$

  Par la question 9., on en déduit que $\frac{k}{n}$ est un multiple de $\frac{1}{4}$, donc $\text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$ est un multiple entier de $\frac{\pi}{4}$. Donc $\boxed{\arg(z) \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]}$.
- Enfin, si $a < 0$, on remarque juste que $(-z)^n$ est aussi réel. Donc, par le même argument que précédemment, $\arg(-z) \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$, donc $\arg(z) \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$.

D-III. Propriétés géométriques

On va s'intéresser à l'existence de certaines figures que l'on peut tracer sur $\mathbb{Z}[i]$.

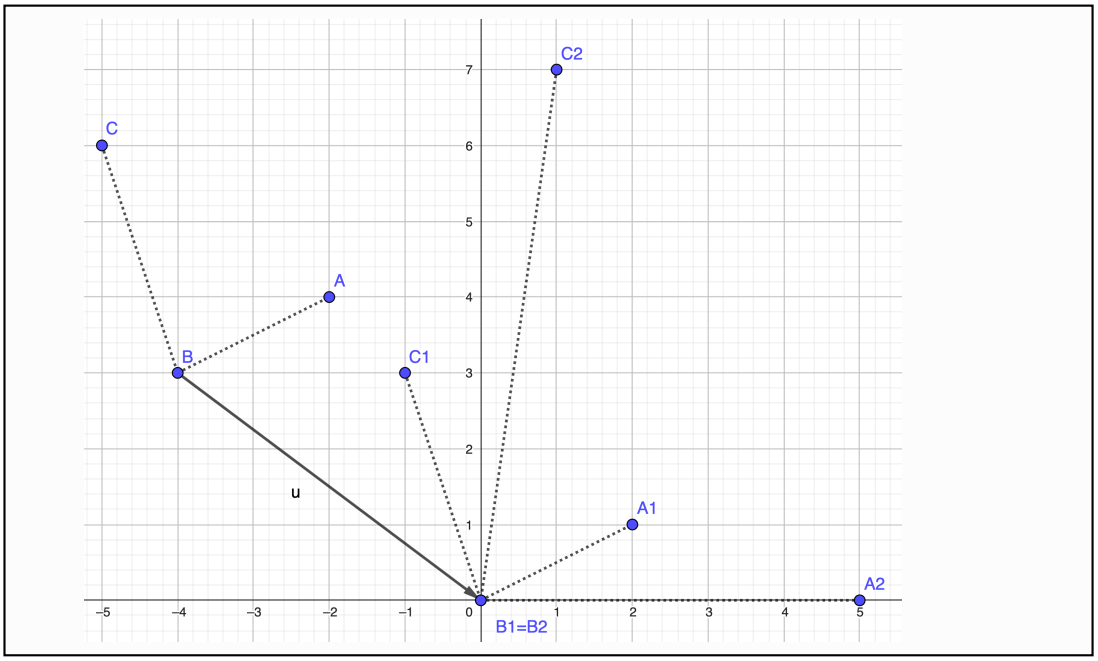
Angles entre des points de $\mathbb{Z}[i]$ Soient A, B et C trois points du plan, d'affixes respectives a, b et c **que l'on suppose distinctes et dans** $\mathbb{Z}[i]$. On suppose que l'angle $\widehat{ABC}$ est de la forme $r\pi$, où r est un nombre rationnel, et on veut montrer que $\widehat{ABC}$ est un multiple entier (relatif) de $\frac{\pi}{4}$.

On rappelle que toutes les transformations géométriques du type $z \mapsto \alpha z + \beta$, avec α dans $\mathbb{C}^*$ et β dans $\mathbb{C}$, sont des transformations qui préservent les angles.

20. COURS On note τ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z - b$. Quel type de transformation géométrique est τ ?
On note $A_1(a_1)$, $B_1(b_1)$ et $C_1(c_1)$ les images respectives de A, B et C par cette transformation. Dessiner les points A, B, C et A_1, B_1 et C_1.

Correction

Par le cours, τ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $-b$. On est donc dans la situation suivante.



21. COURS On note φ l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $\overline{a_1}z$. Quel type de transformation géométrique est φ ?
On note $A_2(a_2)$, $B_2(b_2)$ et $C_2(c_2)$ les images respectives de A_1, B_1 et C_1 par cette transformation φ.
Dessiner (sur le même dessin que la question 20. si possible !) les points A_2, B_2 et C_2.

Correction

Par le cours, on sait que la transformation $z \mapsto \overline{a_1}z$ est ou bien l'identité si $\overline{a_1} = 1$, ou bien la composée d'une homothétie de rapport $|a_1|$ de centre O et d'une rotation de centre O et d'angle $\arg(\overline{a_1}) = -\arg(a_1)$. On a la figure ci-dessus !

22. Justifier que $\arg(c_2) = r\pi[2\pi]$, et que $c_2 \in \mathbb{Z}[i]$.

Correction

On sait que $b_2 = 0$, que $a_2 = a_1\overline{a_1} = |a_1|^2$. Ainsi, une mesure de l'angle $\widehat{A_2B_2C_2}$ est

$$\arg\left(\frac{c_2 - b_2}{a_2 - b_2}\right) = \arg\left(\frac{c_2}{|a_1|^2}\right) = \boxed{\arg(c_2)}.$$

Mais comme les deux transformations que nous avons faites préservent les angles, on en déduit que $\boxed{\arg(c_2) \equiv r\pi[2\pi]}$.

Enfin, $\boxed{c_2 = \overline{a_1}c_1 = \overline{(a-b)}(c-b) \in \mathbb{Z}[i]}$.

23. En déduire qu'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $r\pi \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]$.

Correction

On en déduit que, si $r = \frac{p}{q}$, $\arg(c_2^q) \equiv qr\pi[2\pi] \equiv p\pi[2\pi]$, donc $c_2^q \in \mathbb{R}$.

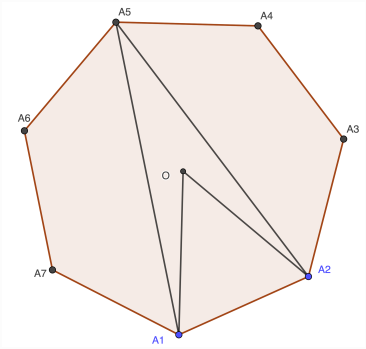
Par la question 19., on en déduit que $\boxed{\arg(c_2) \equiv 0\left[\frac{\pi}{4}\right]}$, c'est-à-dire qu'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $\boxed{r\pi = k\frac{\pi}{4}}$.

Polygones réguliers dans $\mathbb{Z}[i]$ On se demande désormais s'il existe des polygones réguliers dont les sommets sont des éléments de $\mathbb{Z}[i]$. On rappelle qu'un polygone est régulier si tous ses côtés sont de la même longueur. Il est alors inscrit dans un cercle.
Soit un tel polygone régulier à n côtés ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$), dont les sommets sont des éléments de $\mathbb{Z}[i]$. On note ses sommets $A_1, \dots, A_n$ (on tourne dans le sens trigonométrique).

24. Démontrer que si $i \in [\![3, n]\!]$, alors l'angle $\widehat{A_1A_iA_2}$ vaut $\frac{\pi}{2n}$ et conclure que $n = 4$.

Correction

Il faut dessiner !



Soit $i \in [\![3, n]\!]$. Il faut se rappeler qu'un polygone régulier est inscrit dans un cercle. Par le lien entre angle inscrit et angle au centre, on sait que $\widehat{A_1A_iA_2} = \frac{1}{2}\widehat{A_1OA_2}$. Mais par le caractère régulier du polygone, $\widehat{A_1OA_2} = \frac{2\pi}{n}$, donc $\widehat{A_1A_iA_2} = \frac{\pi}{n}$.
Mais $\widehat{A_1A_iA_2}$ est un angle formé par des éléments de $\mathbb{Z}[i]$, qui est un multiple rationnel de π, donc il est multiple entier de $\frac{\pi}{4}$. Donc, nécessairement, par la question 23. $\boxed{n = 4}$ (car $n \geqslant 3$).

25. Établir la réciproque du résultat prouvé précédemment.

Correction

Réciproquement, il existe bien des carrés à coefficients dans $\mathbb{Z}[i]$!