MPSI 1

Mathématiques DS 01

Samedi 23 septembre – 8h-10h

- Durée : 2 heures.
- Toute calculatrice ou appareil électronique est interdit.
- Le sujet est composé de questions de cours, de deux exercices et d'un problème. Le barème

indicatif est le suivant

Exercice 1 (cours)	Exercice 2	Problème
2,5	5	12,5

- Le sujet est **très long** : il **ne faut pas** essayer de tout faire. Un sujet long vous permet de **choisir** ce qui vous inspire le plus. Repérez les questions indépendantes, les parties indépendantes des autres, etc.
- Prenez **5-10 minutes** pour lire le sujet en entier et décider de la stratégie que vous adopterez.
- **Encadrez, soulignez vos résultats et numérotez vos pages.**
- À tout moment, vous pouvez admettre le résultat d'une question pour pouvoir continuer : il suffit de le préciser clairement sur la copie.
- Si vous voyez ce qui semble être une erreur d'énoncé, indiquez-le sur la copie.
- Essayez de changer de copie, au moins de page, lorsque vous changez d'exercice.
- Laissez de la place dans une marge à gauche pour pouvoir noter plus facilement le devoir.
- Une réponse fautive, si elle ne laisse pas paraître de calculs intermédiaires, compte 0 points ; avec calculs intermédiaires elle peut rapporter quelques points.

♪ Bon courage! ♪

Exercice 1. Questions de cours – 10 minutes maximum.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Nier

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon.$$

Comment interprétez-vous cet énoncé (avant qu'il ne soit nié) ?

2. Donner l'identité de Bernoulli et factoriser $a^5 + b^5$.
 3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Définir $|x|$. Si x est un réel vérifiant $|x - 1| \leq \frac{1}{2}$, encadrer x entre deux réels.
 4. Factoriser $\cos(p) + \cos(q)$.

Exercice 2. Calculs. Toutes les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Soient x et y deux réels strictement positifs. On pose

$$a = \frac{x+y}{2} \quad g = \sqrt{xy} \quad h = \frac{2xy}{x+y} \quad q = \sqrt{\frac{1}{2}(x^2 + y^2)}$$

Montrer que a, g, h, q sont rangés dans un ordre indépendant de x et y .

2. Soit P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y - z = 0$ et $D = \text{Vect}(A)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Démontrer que

$$\forall X \in \mathbb{R}^3, \exists!(U, V) \in P \times D, X = U + V.$$

3. Pour quels réels m l'équation $\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x) = m$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Problème 1. Autour des nombres de Bernoulli

On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli :
$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0 \end{cases}$$

On admet qu'une telle relation définit une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le but de ce problème est d'étudier la suite des nombres de Bernoulli et notamment de comprendre la manière dont ils interviennent dans le calcul de sommes de puissances d'entiers.

A. Premiers calculs.

1. Calculer b_1, b_2, b_3, b_4 .

2. Démontrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.

B. Sommes de puissances d'entiers et nombres de Bernoulli.

Les nombres de Bernoulli ont d'abord été étudiés par Jacques Bernoulli (1654-1705) pour l'étude de sommes de la forme $1 + 2 + \dots + n, 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, etc.

Pour tous entiers naturels n et p , on définit la somme $S_p(n)$ comme suit :
$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p.$$

3. Donner, sans justification, la valeur de $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On souhaite désormais déterminer une formule pour $S_p(n)$, avec p et n entiers, en fonction des nombres de Bernoulli.

B-I. Une première formule de récurrence

4. Montrer que pour tout couple d'entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $S_{p+1}(n+1) = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n)$.

5. En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - p! \sum_{j=0}^{p-1} \frac{S_j(n)}{j!(p+1-j)!}.$$

On pensera que $S_{p+1}(n+1) - S_{p+1}(n)$ se calcule facilement.

B-II. Expression de $S_p(n)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Définissons, pour n et p entiers naturels, $T_p(n) = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$.

Le but des questions suivantes est de démontrer que pour tous n et p entiers, $S_p(n) = \frac{1}{p+1} T_p(n)$.

6. Démontrer que pour tous entiers naturels n et p ,

$$T_p(n+1) - T_p(n) = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j} b_k n^j = (p+1)n^p.$$

On aura intérêt à exprimer $\binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j}$ comme un produit de coefficients binomiaux dont seul un des deux dépend de k .

7. Conclure que pour tous n et p entiers naturels, $S_p(n) = \frac{1}{p+1} T_p(n)$.

8. Déterminer une expression de $\sum_{k=1}^n k^4$.

C. Nullité des b_k pour k impair

On admet le résultat suivant

Proposition 1

Soit P un polynôme tel que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(n) = 0$. Alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, $P(t) = 0$.

9. Démontrer que

$$\forall p \geq 1, (p+1)b_p = (-1)^p \left(p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} b_k (-1)^{1+k} \right).$$

et que b_k est nul pour tout entier impair k .