N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 1
Calculs algébriques

Table des matières

Dans ce chapitre, on parlera de nombres complexes, même si l'on n'a pas pris le temps de les redéfinir.

1 Manipulation de sommes et de produits

1.1 Sommes et produits simples

Commençons par des notations.

Définition 1

1. Si $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes, si m et n sont des entiers naturels, on définit

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

et

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times \cdots \times a_n.$$

et on lit « somme des a_k pour k allant de m à n ».

2. On note aussi

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{m\leqslant k\leqslant n} a_k \text{ et } \prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{m\leqslant k\leqslant n} a_k.$$

3. Si $E = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ est un ensemble fini de complexes, on définit

$$\sum_{x\in E} x = e_1 + \cdots + e_k.$$

4. Par convention,

$$\sum_{x\in\emptyset} x = 0 \text{ et } \prod_{x\in\emptyset} x = 1,$$

et, si $n < m$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \text{ et } \prod_{k=m}^{n} a_k = 1.$$

Exemple 2

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4} 2^k = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$

2. Si $\mathrm{I} = \{k \in [\![0, 10]\!],\ k \text{ est multiple de } 3\}$, alors $\displaystyle\prod_{i\in\mathrm{I}}(i+1) = 1 \times 4 \times 7 \times 10 = 280.$

Remarque 3

1. Les indices des sommes et des produits sont des variables muettes.

2. Le produit précédent aurait aussi pu s'écrire comme

$$\prod_{\substack{i\in[\![1,10]\!]\\ i \text{ est multiple de } 3}}$$

ou encore (par abus de notation)

$$\prod_{0\leqslant 3k\leqslant 10}(3k+1).$$

Proposition 4

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de complexes, λ un complexe. Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

- (linéarité)

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k+b_k)=\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right)+\left(\sum_{k=m}^{n}b_k\right),\quad \sum_{k=m}^{n}(\lambda a_k)=\lambda\left(\sum_{k=m}^{n}a_k\right).$$

- (comportement avec le produit)

$$\prod_{k=m}^{n}(a_k\times b_k)=\left(\prod_{k=m}^{n}a_k\right)\times\left(\prod_{k=m}^{n}b_k\right),\quad \prod_{k=m}^{n}(\lambda a_k)=\lambda^{n-m+1}\left(\prod_{k=m}^{n}a_k\right).$$

Remarque 5

ATTENTION aux parenthèses ! Par exemple,

$$\left(\sum_{k=0}^{4}2^k\right)-1=30,$$

alors que

$$\sum_{k=0}^{4}(2^k-1)=0+1+3+7+15=26.$$

Proposition 6 (Exemples fondamentaux)

1. Si $\lambda\in\mathbb{C}$ et $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, avec $m\leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n}\lambda=(n-m\boxed{+1})\lambda \text{ et } \prod_{k=m}^{n}\lambda=\lambda^{n-m+1}.$$

2. (somme des puissances d'entiers) Si $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\ \sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

3. Si $x \in \mathbb{C}$, si $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $m \leqslant n$,

$$\sum_{k=m}^{n} x^k = \begin{cases} n - m + 1 \text{ si } x = 1 \\ x^m . \dfrac{1 - x^{n-m+1}}{1 - x} \end{cases}.$$

4. de manière plus générale,

- si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} a_k &= \frac{(a_m + a_n) \times (n - m + 1)}{2} \\ &= \frac{(\text{premier terme} + \text{ dernier terme}) \times (\text{nombre de termes})}{2}. \end{aligned}$$

- si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{C}$, $\boxed{\text{différente de } 1}$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \text{ premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Remarque 7

En particulier,

$$\prod_{k=m}^{n} (\lambda . a_k) = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k.$$

Démonstration

Preuve partielle, nous ne démontrons que la somme des carrés (pour montrer que ce résultat peut toujours se trouver par récurrence). Nous attendrons un peu pour les sommes géométriques.
On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ la proposition

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

L'**initialisation** est immédiate : $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2.0+1)}{6}$.
Pour l'**hérédité**, soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \text{ par hypothèse de récurrence.} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}\Big(n(2n+1) + 6(n+1)\Big) \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + 7n + 6). \end{aligned}$$

Or,
$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6,$$
donc
$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$
D'où l'hérédité, et, par le principe de récurrence la proposition $\mathcal{P}_n$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. ■

Proposition 8

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ tels que $m < n < p$. Alors

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{p} a_k$,
2. $\displaystyle\prod_{k=m}^{p} a_k = \prod_{k=m}^{n} a_k \times \prod_{k=n+1}^{p} a_k$.

Exemple 9

Ainsi, si $m \leqslant n$,
$$\sum_{k=m}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 - \sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(m-1)m(2(m-1)+1)}{6}.$$

Restent maintenant deux propriétés fondamentales : le changement d'indice et le télescopage.

Proposition 10 (Changement d'indice)

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, m et n deux entiers naturels avec $m \leqslant n$.

1. $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-m} a_{k+m}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$.

On ne va pas insister sur cette proposition : ce qui est fondamental c'est la méthode.

Point de méthode 11 (Changement d'indice dans les sommes)

On veut calculer une somme du type
$$\sum_{k=m}^{n} a_k.$$

1. On **pose** $\ell = \dots$ (une expression en fonction de k)
2. On vérifie dans quel ensemble la nouvelle variable varie. Pour les changements de variables simples (où le coefficient devant k est ± 1), on peut écrire

Quand $k = m$, $\ell = \dots$
Quand $k = n$, $\ell = \dots$.

3. On exprime a_k en fonction de ℓ
4. On écrit la nouvelle somme, en réordonnant éventuellement les bornes.

Remarque 12

Attention aux changements de variables qui ne sont pas du type $\ell = k + \dots$ ou $\ell = \dots - k$. Pour le moment, je les déconseille (attendre le chapitre 5 pour que nous parlions de bijection et de changement de variables bijectif). Ainsi, il est faux d'écrire

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{2k} = \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant 2n} a_\ell.$$

C'est faux ! Le bon changement de variables est

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{2k} = \sum_{\substack{0 \leqslant \ell \leqslant 2n \\ \ell \text{ pair.}}} a_\ell.$$

Exemple 13

Méthode de Gauss pour calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} k$. Calculons $S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} k$.
Dans la seconde somme, posons $\ell = n - k$.
Quand $k = 0$, $\ell = n$. Quand $k = n$, $\ell = 0$.
De plus $k = n - \ell$.
Donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \sum_{\ell=0}^{n} n - \ell = \sum_{k=0}^{n} n - k,$$

la dernière égalité étant vraie car les variables sont muettes. Donc

$$S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n - k = \sum_{k=0}^{n} (k + n - k) = \sum_{k=0}^{n} n = n \times (n+1),$$

donc

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Remarque 14

1. Attention à bien réordonner les bornes : ne jamais écrire, après un changement d'indices dans une somme, $\sum_{k=n}^{0} a_k$.
2. Vraiment, ne pas apprendre par cœur la propriété de changement d'indices, notamment

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

pour les bornes : toujours refaire le calcul. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}.$$

Proposition 15 (Sommes télescopiques)

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Soit (b_k) la suite définie pour tout k par $b_k = a_{k+1} - a_k$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = a_{n+1} - a_m.$$

Démonstration

Par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

Dans la première somme, on pose $\ell = k+1$. Alors

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{\ell=m+1}^{n+1} a_\ell = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k,$$

car les variables sont muettes.
Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - a_k &= \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_k \\ &= a_{n+1} + \sum_{k=m+1}^{n} a_k - \left(a_m + \sum_{k=m+1} \hat{}\, n a_k\right) \\ &= a_{n+1} - a_m,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Proposition 16 (Produits télescopiques)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls, $(m,n)\in\mathbb{N}^2$. Alors

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}.$$

Exemple 17

1. Calculons

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

On remarque que
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{k+1}.$$
Alors
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

2. Démontrons que si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Pour ce faire, on calcule Démontrons que si $x \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Pour ce faire, on calcule
$$(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k - x^{k+1} = 1 - x^{n+1},$$
par télescopage.

1.2 Sommes doubles

On considèrera dans toute cette partie des familles indexéess par deux indices $(a_{i,j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$.

Définition 18

Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite complexe indexée sur $\mathbb{N}^2$, $(m,n,p,q) \in \mathbb{N}^4$ tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$. On définit
$$\sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{ij}$$
comme $\sum_{i=m}^{n} b_i$ où, pour tout i, $b_i = \sum_{j=p}^{q} a_{ij}$.

Remarque 19

Avec les notations précédentes, on remarquera que b_i ne dépend que de i et pas de j (j étant une variable muette).

Proposition 20 (Théorème de Fubini)

Soit $(a_{i,j})_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$ une famille de réels. Alors
$$\sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{m} a_{i,j}\right).$$
On notera parfois cette somme
$$\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j},$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

ou bien, si $m = p$ et $n = q$,

$$\sum_{m \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}.$$

Remarque 21

Remarque importante : on définit exactement de la même manière les produits doubles. Afin d'alléger les propositions de cette section, nous ne les établirons que pour les sommes doubles.

Exemple 22

Calculons, si $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} ij \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i \sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(i \frac{n(n+1)}{2} \right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n} i \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2.
\end{aligned}$$

Ce résultat est normal, il est en fait généralisable avec la proposition suivante.

Proposition 23 (Sommes doubles décorrélées)

Soient $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux suites de complexes, $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^4$ tels que $m \leqslant n$ et $p \leqslant q$. Alors

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=p}^{q} b_j \right) = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=p}^{q} a_i b_j.$$

En particulier,

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=m}^{n} \sum_{j=m}^{n} a_i a_j.$$

Remarque 24

Attention ! Il faut bien mettre deux indices différents lorsqu'on rassemble les sommes. La somme

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=p}^{q} b_i\right)$$

a tout à fait un sens, mais

$$\text{« } \sum_{i=m}^{n}\sum_{i=p}^{q} a_i b_i \text{ »}$$

ne veut rien dire.

Proposition 25 (et définition)

Soit $(a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite de complexes. Alors

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} a_{ij} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}$$

On note cette somme

$$\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}.$$

Remarque 26

1. On appelle ces sommes sommes triangulaires. Il faut pouvoir se les représenter sur un schéma.
2. Pour intervertir facilement des sommes triangulaires, écrire si possible la somme double sous la forme d'une somme qui ne contient qu'une inégalité ($0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$).

Exercice 27

Intervertir les sommes doubles suivantes

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} a_{ij}.$

Exemple 28

Un exemple d'application, une méthode pour calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k$, où $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{k} 1 \right) \times x^k \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} x^k \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} x^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} x^k \\
&= \sum_{i=1}^{n} x^i \times \frac{1 - x^{n-i+1}}{1-x} \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{i=1}^{n} x^i - x^{n+1} \\
&= \frac{1}{1-x}.x.\frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} n x^{n+1} \\
&= \frac{x - x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{n x^{n+1}}{1-x} \\
&= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n x^{n+2}}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

D'autres méthodes existent, pensez-y !

1. méthode un peu astucieuse : on calcule xS_n et on essaie de retrouver S_n.

$$\begin{aligned}
xS_n &= \sum_{k=1}^{n} k x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1-1) x^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1) x^{k+1} - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k x^k - \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} \\
&= S_n + (n+1)x^{n+1} - x - x^2 \frac{1-x^n}{1-x},
\end{aligned}$$

donc

$$(x-1)S_n = (n+1)x^{n+1} - x - x\frac{1-x^n}{1-x},$$

i.e.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{x-(n+1)x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^2-x^{n+2}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x-(n+1)x^{n+1} - x + (n+1)x^{n+2} + x^2 - x^{n+2}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x-(n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

2. la méthode de la dérivée (si jamais x est réel) : on pose

$$f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} t^k.$$

alors $f' : t \mapsto \sum_{k=1}^{n} kt^{k-1}$, donc $S_n = xf'(x)$.

Or,

$$f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$S_n = xf'(x) = \frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2},$$

d'où, encore, le même résultat !

3. cf. TD pour une autre méthode, la transformation d'Abel.

Proposition 29 (Développement d'un carré)

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes, $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m \leqslant n$. Alors

$$\left(\sum_{i=m}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=m}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j.$$

2 Suites numériques

2.1 Rappels de lycée : suites arithmétiques et géométriques

Le programme de lycée est à savoir !

2.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 30

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si $\exists (a,b)\in\mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Proposition 31 (Suites arithmético-géométriques)

Soient a et b deux réels, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b. \end{cases}$$

Alors,

(i) si $a = 1$, la suite est arithmétique de raison b et pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nb$.

(ii) si $a \neq 1$, posons c l'unique solution de $c = ac + b$, i.e. $c = \dfrac{b}{1-a}$. Alors pour tout entier naturel n, $u_n = (u_0 - c)a^n + c$.

Démonstration

1. C'est une récurrence immédiate.
2. On cherche c tel que $c = ac + b$. Alors $c = \dfrac{b}{1-a}$. On a donc, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + b \\ \quad c = ac + b \end{cases}$$

En soustrayant les deux expressions, on en déduit que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$, donc $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, donc pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$u_n - c = a^n(u_0 - c) \text{ i.e. } u_n == c + a^n(u_0 - c).$$

■

2.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 32

Soient $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^2$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Soit (e) l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{e}$$

1. si (e) a deux racines distinctes q_1 et q_2, alors $\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \lambda q_1^n + \mu q_n^2.$$

2. si (e) a une racine double q_0, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (\lambda + \mu n) q_0^n.$$

Proposition 33

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0.$$

Soit (e) l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{e}$$

1. si (e) a deux racines distinctes q_1 et q_2, alors $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \lambda q_1^n + \mu q_n^2.$$

2. si (e) a une racine double q_0, alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (\lambda + \mu n) q_0^n.$$

3. si (e) n'a pas de racine réelle, elle admet deux racines complexes conjuguées q_1 et q_2. On écrit alors $q_1 = \rho e^{i\theta}$ et $q_2 = \rho e^{-i\theta}$, et alors on dispose de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)).$$

Démonstration

Il y a plusieurs preuves de ce résultat. Je vais donner les idées d'une preuve qui n'utilise que ce qui a déjà été fait jusqu'ici. Et seulement dans le cas complexe, avec deux racines distinctes. Le reste se fait identiquement. On note toujours q_1 et q_2 les deux racines.
Analyse. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On montre déjà qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda q_1 + \mu q_2 = u_1 \end{cases}$$

Ceci est clairement vrai par la partie suivante : pour un système 2×2, le système admet une solution si et seulement si son déterminant $q_2 - q_1 \neq 0$, ce qui est vrai car q_1 est supposé différent de q_2.
Ensuite, on montre par récurrence que pour tout n, $u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.
La **synthèse est très facile.** ■

Exemple 34

La suite de Fibonacci, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

3 Identités remarquables

Proposition 35 (Manipulation des puissances de -1)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

1. $(-1)^n = \begin{cases} -1 \text{ si } n \text{ est impair} \\ 1 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$
2. $\dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$.

Remarque 36

Une remarque utile dans la suite du chapite : par convention, $0^0 = 1$.

3.1 Identité de Bernoulli

Proposition 37 (Identité de Bernoulli)

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b) \times \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-2}\right) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}. \end{aligned}$$

Démonstration

On fait simplement le calcul du membre de droite :

$$\begin{aligned} (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^{n-1-k}b^k \\ &= \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k}b^k - a^{n-(k+1)}b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k - u_{k+1} \text{ où } u_k = a^{n-k}b^k \\ &= u_0 - u_n \text{ par télescopage} \\ &= a^n - b^n. \end{aligned}$$

D'où le résultat. (la dernière égalité se démontre en refaisant le calcul ou en posant le changement d'indice $\ell = n - 1 - k$) ■

Remarque 38

1. Si n est impair, on peut factoriser $a^n + b^n$. En effet,

$$\begin{aligned} a^n + b^n &= a^n - (-b)^n \text{ car } n \text{ est impair} \\ &= (a - (-b)) + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}(-b)^k \\ &= (a + b) + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k. \end{aligned}$$

2. On peut remarquer que, de manière générale, si n est pair et a et b sont non nuls, $a^n + b^n$ n'est pas factorisable en $(a+b) \times P(a, b)$ où P est une expression polynomiale en a et b (avec des sommes et des produits. En effet, si c'était le cas, $a^n + b^n$ s'annulerait en $b = -a$, i.e. $2a^n = 0$, i.e. $a = 0$.

3.2 Coefficients binomiaux

Définition 39 (Factorielle)

Soit n un entier naturel. On définit la factorielle de n, notée $n!$ et lue « n factorielle » comme suit :

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Par convention, $0! = 1$.

Remarque 40

La factorielle n'est **PAS** multiplicative : $(2n)! \neq 2n!$.
Par exemple, $6! = 720$, $3! = 6$.

Définition 41

Soient n dans $\mathbb{N}$ et k dans $\mathbb{Z}$. On définit le coefficient binomial « k parmi n » , noté $\binom{n}{k}$ et lu « k parmi n » :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \text{ si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque 42

1. Ce nombre doit être interprété comme le nombre de manières que l'on a de choisir k objets parmi n (cf. section suivante !).

2. Il peut être utile de penser à la formule de $\binom{n}{k}$ comme

$$\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

Ainsi, si l'on veut calculer $\binom{100}{2}$, on ne calcule surtout pas de factorielle, mais $\frac{100 \times 99}{2 \times 1}$.

Proposition 43

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

1. (Valeurs remarquables)

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

2. (symétrie) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
3. si k et n sont non nuls, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$,
4. (formule du triangle de Pascal) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$,
5. $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

Remarque 44

La formule du triangle de Pascal (1623-1662) permet de créer effectivement un triangle (si n croît en descendant et k croît en allant à droite)

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Démonstration

On ne fait les démonstrations que dans le cas où $k < 0$ et ou $k > n$: elles sont immédiates

1. immédiat
2. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

3. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

4. Il suffit de mettre au même dénominateur !

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(k+1)n!+(n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)(n+1-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

5. Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ \binom{n}{k}\in\mathbb{N}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation. $\binom{0}{0} = 1$ et pour tout $k\neq 0$, $\binom{0}{k} = 0$, donc pour tout k dans $\mathbb{Z}$, $\binom{0}{k}\in\mathbb{N}$.

Hérédité. Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ vraie. Soit $k\in\mathbb{N}$. Par la formule du triangle de Pascal,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{k-1}$ sont dans $\mathbb{N}$, donc $\binom{n+1}{k}$ est dans $\mathbb{N}$. D'où l'hérédité et le résultat, par le principe de récurrence.

■

3.3 Binôme de Newton

Proposition 45 (Formule du binôme de Newton)

Soient a et b deux réels, n un entier naturel. Alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}.$$

Remarque 46

1. Comme $a+b=b+a$, on a aussi
$$(a+b)^n=(b+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$
2. En pratique, connaissez
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\ (a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
et sachez retrouver très rapidement un petit développement à l'aide du binôme de Newton.

Démonstration

Démontrons par récurrence
$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

Initialisation : $(a+b)^0=1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\binom{0}{0}a^0b^{0-0}=1$. D'où $\mathcal{P}_0$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Alors
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1}&=(a+b)\times(a+b)^n\\&=(a+b)\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\text{ par hypothèse de récurrence.}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Dans la première somme, on effectue le changement d'indice $\ell=k+1$. Alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}&=\sum_{\ell=1}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^{\ell}b^{n-(\ell-1)}\\&=\sum_{\boxed{\ell=0}}^{n+1}\binom{n}{\ell-1}a^{\ell}b^{n+1-\ell}\text{ car par convention, }\binom{n}{-1}=0\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n+1-k}\text{ (variables muettes)}\end{aligned}$$

De même, on peut réécrire la seconde somme
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{\boxed{n+1}}\binom{n}{k}a^kb^{n+1-k}$$

car par convention, $\displaystyle\binom{n}{n+1}=0$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k b^{n+1-k} \text{ par la formule de Pascal,}\end{aligned}$$

d'où l'hérédité.
Héréditaire et vraie au rang 0, la propriété est vraie par le principe de récurrence. ■

Exemple 47

Trois exemples importants d'utilisation de la formule du binôme de Newton :

1. si $x \in \mathbb{C}$,
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \times 1^{n-k} = (x+1)^n$$
2. (somme des coefficients binomiaux)
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$
3. (somme alternée des coefficients binomiaux)
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = \begin{cases}0 \text{ si } n>0 \\ 1 \text{ si } n=0.\end{cases}$$
Cette somme vaut $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\dots$.

4 Systèmes linéaires

Dans cette section, $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que si une propriété est formulée avec des éléments dans $\mathbb{K}$, elle sera vraie en remplaçant tous les $\mathbb{K}$ par des $\mathbb{R}$ ou tous les $\mathbb{K}$ par des $\mathbb{C}$).

4.1 Manipulation d'éléments de $\mathbb{K}^n$

Définition 48

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On appelle les éléments de $\mathbb{K}^n$ **vecteurs**, et on nommera les éléments de $\mathbb{K}$ **scalaires**.
2. On représente souvent $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sous la forme d'un vecteur-colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

3. Si $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$, si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on définit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda . x_1 \\ \vdots \\ \lambda . x_n \end{pmatrix}$$

4. Si $p \in \mathbb{N}^*$, si $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$, on définit

$$\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \left\{ \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Remarque 49

On appelle $\mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p)$ « sous-espace vectoriel engendré par $(U_1, \dots, U_p)$ » , mais pour le moment, on prend ceci comme un mot de vocabulaire... Attendons février prochain pour en savoir davantage !

Exemple 50

Dans $\mathbb{R}^3$, si $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Vect}(U, V) &= \left\{ \lambda U + \mu V,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda - \mu \\ 0 \end{pmatrix},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \end{aligned}$$

On reconnaît là le **plan** passant par 0 et dirigé par (U, V).

Définition 51

Si $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $a \in \mathbb{K}^n$, si $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathbb{K}^n)^p$, on définit

$$a + \mathrm{Vect}(U_1, \dots, U_p) = \left\{ a + \lambda_1 U_1 + \dots + \lambda_p U_p,\ (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

Exemple 52

Dans $\mathbb{R}^2$, si $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$a + \mathrm{Vect}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il s'agit de la droite passant par $(0, 1)$ et de vecteur directeur U.

On connaît depuis les petites classes une autre description des droites ou des plans : via des équations.

4.2 Définitions de base sur les systèmes linéaires

Définition 53

Soient n et p dans $\mathbb{N}^*$.

1. si $(a_1, \dots, a_p)$ et b $p+1$ éléments de $\mathbb{K}$. L'équation linéaire de coefficients $(a_1, \dots, a_p)$ et de second membre b est l'équation d'inconnues $(x_1, \dots, x_p)$ suivante :
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b.$$
2. Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues est la donnée de n équations linéaires à p inconnues. On parlera aussi de système linéaire.
3. On écrit un système linéaire sous la forme
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$
On dit alors que
   - $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ sont les coefficients du système,
   - $(x_1, \dots, x_p)$ sont les inconnues du système,
   - $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé second membre du système.
4. Si $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$, on dit que le système est **homogène**.
5. **Résoudre** un système, c'est déterminer l'ensemble des p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ solutions du système.
6. Le système linéaire homogène associé au système précédent est le système
$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

Exemple 54

1. Le système
$$\begin{cases} 2x + y + 3x = 0 \\ x - z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$
d'inconues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est un système linéaire à trois inconnues, de second membre $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. En revanche, le système
$$\begin{cases} x + yz = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$
d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ n'est pas un système linéaire.

3. Attention à bien **préciser** les inconnues. Ainsi,
   - $\{x = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est un système à une seule solution,
   - $\{x = 0$ d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a pour ensemble de solutions l'axe des abscisses,
   - $\{x = 0$ d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a pour ensemble de solutions le plan d'équation $x = 0$.

Proposition 55

Soit (S) un système linéaire **homogène**.

1. (solution évidente) $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution du système.
2. (principe de linéarité) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux solutions de (S), si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda X + \mu Y$ est solution de (S).

Proposition 56 (Structure des solutions d'un système linéaire)

Soit (S) un système linéaire quelconque, (S_H) le système homogène associé.

1. si X et Y sont deux solutions de (S), alors $X - Y$ est solutions de (S_H).
2. si X_0 est **une** solution de (S), alors l'ensemble des solutions de (S) est
$$\{X_0 + Y,\ Y \text{ solution de } S_H\}.$$

Exemple 57

Nous n'allons pas prouver ces résultats : ils sont simples à prouver mais un peu longs à écrire. En revanche, on remarque que si l'on regarde le système
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$
si $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ sont solutions, alors
$$\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2c - d = 1 \\ c + 2d = 3 \end{cases}$$

Donc, en soustrayant les premières lignes et les secondes lignes,

$$\begin{cases} 2(a-c)-(b-d)=0 \\ a-c+2(b-d)=0 \end{cases}$$

Mais donc, si X_0 est solution du système et que Y est une solution quelconque, $Y - X_0$ est solution de S_H : d'où la propriété de structure des solutions.

4.3 Résolution d'un système échelonné

Définition 58

Soit (S) un système linéaire, de lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$, d'inconnues $(x_1, \dots, x_p$. S est dit échelonné si pour tout i entre 1 et $n-1$,
si les variables $(x_1, \dots, x_k)$ ont un coefficient **nul** à la ligne L_i,
alors les variables $(x_1, \dots, x_k, \boxed{x_{k+1}})$ ont un coefficient nul à la ligne L_{i+1}.

Exemple 59

Plutôt que d'apprendre la définition par cœur, mieux vaut regarder des exemples !

1. Le système
$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$
est échelonné. En effet,
   - L_1 n'a aucun premier coefficient nul,
   - L_2 a un coefficient nul devant x_1 et x_2,
   - L_3 a un coefficient nul devant x_1, x_2 et x_3.
2. Le système
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$
n'est pas échelonné :
   - L_1 n'a aucun premier coefficient nul,
   - L_2 a bien un coefficient nul de plus que L_1 : celui de x_1,
   - **mais** le coefficient de x_1 dans L_3 n'est pas nul : le système n'est pas échelonné.
3. L'ordre des variables importe donc ! Par exemple, le système
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & & & = & 2 \end{array}\right.$$
d'inconnues (x, y, z), n'est pas échelonné, alors que le système
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} z & + & x & - & 2y & = & 0 \\ & & x & + & 3y & = & 2 \end{array}\right.$$
d'inconnues (z, x, y) est échelonné.

Point de méthode 60 (Résolution d'un système échelonné)

1. On regarde les lignes du type $0 = \alpha$:
   - si $\alpha \neq 0$, alors le système est dit **incompatible**, il n'a pas de solution.
   - si $\alpha = 0$, on retire simplement la ligne.
2. une fois ces lignes retirées,
   - s'il y a autant de lignes que d'inconnues, le système a une unique solution, obtenue en remontant à partir de la dernière ligne.
   - sinon, il y a strictement moins de lignes que d'inconnues : on remplace par des paramètres réels les inconnues manquantes. Les inconnues manquantes sont les variables *non présentes en début de ligne*.

Remarque 61

On n'hésitera pas à utiliser le symbole $\Leftrightarrow$ **entre les systèmes linéaires**.

Exemple 62

1. Résolvons $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ \quad y+2z=3 \\ \qquad z=-1 \end{cases}$ d'inconnues $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x+3y-z=2 \\ y+2z=3 \\ z=-1 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} z=-1 \\ y=3-2z=5 \\ x=2-3y+z=2-15-1=-14 \end{cases}$$

Donc LA solution du système est $\left\{ \begin{pmatrix} -14 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2. Résolvons

$$\begin{cases} x-y+z+t=2 \\ z-t=-1 \end{cases}$$

d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On écrit

$$\begin{cases} x-y+z+t=2 \\ z-t=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t=2 \\ z-t=-1y \qquad =\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\beta,\ \beta\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R} \\ t=\beta,\ \beta\in\mathbb{R}z \qquad =-1+\beta \\ x=y-z-t+2=3+\alpha-2\beta \end{cases}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est (attention à l'ordre des variables)

$$\left\{\begin{pmatrix}3+\alpha-2\beta\\ \alpha\\ -1+\beta\\ \beta\end{pmatrix},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\} = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}(U,V),$$

où $U = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 63

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues (x, y, z) :

$$\begin{cases} x+2y+3z=3\\ 4y+z=5\\ z=1\end{cases},\quad \begin{cases} x+2y+3z=3\\ 4y+z=5\end{cases},\quad \begin{cases} x+2y+3z=0\\ 4y+z=0\end{cases}.$$

Que remarquez-vous ?

4.4 Pivot de Gauss

Maintenant que l'on sait résoudre un système échelonné, il faut savoir comment on peut échelonner un système : c'est le principe du pivot de Gauss.

Définition 64

Deux systèmes linéaires sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition 65

Soit S un système linéaire, de lignes $L_1, L_2, \dots, L_n$. Une opération élémentaire sur S est une des opérations suivantes :

(i) l'échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$.

(ii) la multiplication d'une ligne par un réel *non nul* $L_i \leftarrow \lambda L_i$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$.

(iii) l'ajout à une ligne d'un multiple d'une autre ligne : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 66

Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Point de méthode 67 (Pivot de Gauss)

Pour échelonner un système linéaire, par exemple

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

1. On part de l'inconnnue x_1 dans la première ligne : si x_1 n'est pas présente dans la première ligne, on le cherche dans les lignes suivantes et on effectue une permutation. Si x_1 n'est pas du tout présente, on passe à x_2. L'inconnue ainsi sélectionnée est appelée **pivot**.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} \boxed{x_1} & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \end{array}\right.$$

2. On supprime, à l'aide de transvections, toutes les occurrences de x_1 dans les lignes qui suivent

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\ & & & & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 & \end{array}\right.$$

3. On cherche maintenant x_2 dans la deuxième ligne : s'il n'y est pas, on fait une permutation avec une ligne qui est **sous** la deuxième ligne (pour conserver le caractère échelonné).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\ & & \boxed{x_2} & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 & L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & & & & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & \\ & & -x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 & \end{array}\right.$$

4. On supprime toutes les occurrences de x_2, dans les lignes qui suivent (pas dans les lignes du dessus, pas utile).

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr|l} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 & \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -2 & \\ & & & & 5x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & \\ & & & & & & x_4 & = & 2 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}\right.$$

Là notre système est échelonné, mais on pourrait continuer ainsi, en utilisant x_3 comme pivot, etc.

Remarque 68

Toujours indiquer les opérations élémentaires que vous faites : pour vous relire déjà, et car un calcul non justifié et faux ne rapporte absolument aucun point, alors que s'il est détaillé, il peut rapporter quelques points.

Exercice 69

Résoudre
$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ 2x - 2y + z - t = 1 \\ x + y + z - 3t = -1 \\ -z + t = 0 \end{cases}$$
d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et
$$\begin{cases} x - y + z - t = 2 \\ x - y - z + 2t = 0 \\ x + 2t = 1 \end{cases}$$
d'inconnues $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

Remarque 70

1. Il n'y a pas unicité de l'écriture de l'ensemble des solutions d'un système linéaire :
$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}\right).$$

2. Quand on fait plusieurs transvections simultanément, il faut toujours enlever des multiples **de la même ligne**. Exemple horrible :
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
Si on écrit $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, en ne faisant pas attention, on se ramène à
$$\begin{cases} 2y = 1 \\ -2y = -1 \end{cases}$$
On a perdu l'inconnue x ! Le problème vient du fait que, dans la deuxième opération, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, L_1 désigne L_1 **après modification** par la première opération...
Bref, en un mot, il faut suivre l'algorithme !

Point de méthode 71 (Résolution d'un système linéaire à paramètres)

On cherche à résoudre un système linéaire avec certains coefficients qui sont des **paramètres** dans $\mathbb{R}$. Ils sont fixés mais on ne connaît pas leur valeur. Par exemple :

Soient $(m, s) \in \mathbb{R}^2$. Discuter de l'ensemble des solutions de
$$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + sy = 1 \end{cases} \text{ d'inconnues } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On fait l'échelonnement du système et sa résolution comme vu précédemment et, dès qu'on a une opération potentiellement interdite, on **disjoint** les cas. Regardons l'exemple.
$$\begin{cases} x + y = m \\ 2x + sy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ (s-2)y = 1 - 2m \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

- **si** $s-2\neq 0$, alors le système devient

$$\begin{cases} y = \dfrac{1-2m}{s-2} \\ x = m - y = \dfrac{ms-2m-1+2m}{s-2} = \dfrac{ms-1}{s-2}. \end{cases}$$

Le système a alors une unique solution, $\dfrac{1}{s-2}\begin{pmatrix} ms-1 \\ 1-2m \end{pmatrix}$.

- sinon, $s=2$ et le système devient

$$\begin{cases} x+y=m \\ 0 = 1-2m \end{cases}$$

Définition 72

On dit que la ligne $0=1-2m$ est une **condition de compatibilité du système**.

— si $1-2m\neq 0$, alors le système est incompatible, il n'a aucune solution.

— sinon $m=\dfrac{1}{2}$,, le système devient

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y=\alpha, \ \alpha\in\mathbb{R} \\ x = \dfrac{1}{2} - y = \dfrac{1}{2} - \alpha \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

4.5 Le cas des systèmes 2×2

Proposition 73

On considère le système 2×2 suivant

$$\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases}$$

Alors si le déterminant $ad-cb$ est non nul, le système admet une unique solution. Dans ce cas, la solution est

$$x = \frac{ud-vb}{ad-cb}, \ x = \frac{av-cu}{ad-cb}.$$