TD 1
Calculs algébriques

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. ◐○○ Calculer les sommes et produits suivants :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2(n-k),\ T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k - 3^k}{4^{k+1}},\ U_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 2. ●●○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $A_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$ et $B_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{i}{j}$.

Exercice 3. ●●○ Calculer

$$S_n = \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij,\ T_n = \prod_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} ij,\ U_n = \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij,\ V_n = \prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij,\ W_n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij,\ X_n = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} ij.$$

Exercice 4. ●○○ Calculer les sommes suivantes

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k},\ S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \text{ [avec } p \leqslant n\text{]}$$

Exercice 5. *Suite homographique*. ●◐○ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. On définit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

   Déterminer l'expression du terme général de $(\ \nu_n\ )$.
3. En déduire la limite de (ν_n), puis la limite de (u_n).

Exercice 6. ●◐○ Discuter, en fonction de la valeur des paramètres λ et μ, des solutions réelles du système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ \lambda x - \mu y = 0 \\ \mu x + \lambda y = \mu \end{cases}$$

Stratégie de résolution. Pour ce TD, il faut insister sur 2 points :

- le plus important, les calculs de sommes/coefficients binomiaux/etc. Faire en priorité l'exercice 7, 10, 13. Ensuite, regarder d'autres exercices comme le 12 (**très bon exercice de révision de différentes méthodes**), 11, 15 et 16.
- pour les systèmes linéaires, vérifiez rapidement que vous savez faire des systèmes de base (si ce n'est pas le cas, faites 20 et 21). Faites 22 si vous avez mal compris le principe des paramètres. **Ne pas y passer trop de temps**.

2 Sommes et produits

Exercice 7. ●○○ Calculer au moyen d'un télescopage les sommes suivantes pour tout entier n non nul

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

2. $T_n = \sum_{k=1}^{n} k.k!$

3. (●●○)$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 8. *Divergence de la série harmonique*. ●○○

1. Montrer que pour tout entier n,

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}.$$

2. Qu'en déduire sur la convergence de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$?

On admet qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Exercice 9. ●◐○ En regroupant judicieusement les termes, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$$

pour tout entier non nul n.

Exercice 10. ●◐○ Calculer les sommes suivantes

1. $S_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$

2. $U_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$ [avec $n > 1$]

Exercice 11. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*. ●●○ Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

On note

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit alors x un réel. Développer $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

2. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

3. Soient a_1, a_2,..., a_n une suite de réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 12. ●●○ On se propose de calculer de trois manières différentes (dont deux vues en cours : ce sont des révisions !) la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$ (où $n \in \mathbb{N}$).

1. (calcul direct) Montrer que $S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} 2^k$ et en déduire la valeur de S_n.

2. (transformation d'Abel) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On pose

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k,\ B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

(a) Déterminer a_n et b_n en fonction de A_n, A_{n-1}, B_n et B_{n-1}.

(b) Montrer la formule suivante, appelée formule d'intégration par parties discrète ou formule d'Abel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1}.$$

(c) Retrouver le calcul de S_n.

3. (Utilisation d'une fonction dérivée) On pose pour tout x dans $\mathbb{R}$ $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

(a) Calculer la derivée de f et montrer que $S_n = 2f'(2)$.

(b) Exprimer, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ sans le symbole somme et en déduire la valeur de S_n.

3 Coefficients binomiaux

Exercice 13. ●◐○ Calculer les sommes suivantes (n est un entier naturel non nul) :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k},\ U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Exercice 14. ●●○

1. Développer $(1 + x^5 + x^7)^{20}$ à l'aide du binôme de Newton.

2. En déduire, en organisant convenablement les sommes, le coefficient de x^{17} dans $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

Exercice 15. ●●○ Montrer que pour tous entiers n et p,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} = \binom{p+n+1}{n+1}.$$

Exercice 16. ●●◐

Montrer que pour tous entiers n et p non nuls tels que $p \leqslant n$,

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p \binom{n}{p}.$$

En déduire de la même manière une formule pour $\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 17. *Formule d'inversion de Pascal*. ●●◐ Soient n un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$, $b_0, \dots, b_n$ $2n+2$ réels vérifiant

$$\forall p \in [\![0, n]\!],\ \ b_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a_k.$$

On veut montrer la formule d'inversion de Pascal : $\forall p \in [\![0, n]\!],\ \ a_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k$.

1. **Dans cette question**, x est un réel et on pose, pour tout p dans $[\![0, n]\!]$, $a_k = x^k$. Calculer, pour tout p dans $[\![0, n]\!]$, b_p et vérifier la formule d'inversion de Pascal.
2. **Démonstration de la formule générale.**
   (a) Démontrer que pour tous p, k et j dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{p}{k}\binom{k}{j} = \binom{p}{j}\binom{p-j}{k-j}$.
   (b) En calculant, pour p dans $[\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k$ à l'aide de l'expression de b_k, démontrer la formule d'inversion de Pascal.

Exercice 18. *Identité de Vandermonde*. ●●○ On se propose dans cet exercice de démontrer et de manipuler l'identité de Vandermonde

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2,\ \ \forall n \in [\![0, a+b]\!],\ \ \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

1. (Une première preuve purement calculatoire) Démontrer le résultat par récurrence sur b. On précisera **soigneusement** la proposition à démontrer.
2. (Une seconde preuve, avec un joli argument algébrique) *On ne suppose plus que l'on a prouvé la formule de Vandermonde*
   (a) **Le produit de Cauchy.** (attention, question difficile) Montrer que pour tout x réel,
   $$\left(\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{b} \binom{b}{k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{a+b} c_k x^k,$$
   où, pour tout k dans $[\![0, a+b]\!]$, $c_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{a}{j}\binom{b}{k-j}$.
   On remarquera en le justifiant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{a}{k} x^k$ et on utilisera le même type de raisonnement pour la seconde somme après avoir effectué un changement de variables.
   (b) **Démonstration de la formule de Vandermonde.** On admettra le résultat suivant :

Lemme 1

Soit n un entier naturel, $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ $2n+2$ réels. Si pour tout x réel, on a

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

alors $a_0 = b_0,\ \ a_1 = b_1,\ \ \dots, a_n = b_n$.

   En développant $(1+x)^{a+b}$ de deux manières différentes, démontrer l'identité de Vandermonde.
3. Déduire de la formule de Vandermonde la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ pour tout entier naturel n.

4 Un tout petit peu de suites

Exercice 19. ●○○ – ●●● Déterminer l'expression du terme général des suites définies par :

1. $\begin{cases} u_0 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n - 4, \end{cases}$
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = 2x_n + 3$;
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \dfrac{1}{3}(x_n + 1)$;
4. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - u_n), \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 2i, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2(i+1)u_{n+1} - 2iu_n, \end{cases}$
6. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$;
7. $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$;
8. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = n \end{cases}$
9. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 2u_n = n^2 \end{cases}$
10. $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ u_1 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + n + 1 \end{cases}$
11. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$ (on commencera par montrer que la suite est toujours définie et on introduira une suite auxilliaire)

5 Systèmes linéaires

Exercice 20. ◐○○ Résoudre les systèmes linéaires homogènes suivants (en appliquant l'algorithme de Gauss), par rapport aux indéterminées $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 0 \end{cases}$.

Exercice 21. ●○○ Résoudre le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x + 3y - 7z + t = 1 \\ 2x + 2y + z + 2t = 0 \\ x - y - 2z + t = -1 \\ x + 7y - 4z + t = 3 \end{cases}$$

Exercice 22. ●◐○ Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

1. $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$.
2. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$.

Exercice 23. *Une propriété de somme directe*. ●●○ Soient H et D les deux ensembles suivants

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0 \right\} \text{ et } D = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Démontrer que $\forall X \in \mathbb{R}^4,\ \exists!(U, V) \in H \times D,\ X = U + V$.

Indications

1 Se ramener à des sommes connues : la somme des k, des k^2, ou les sommes géométriques.

2 Pour A_n, écrire la somme comme une somme double, et séparer les cas $j \leqslant i$ et $j > i$. Pour B_n< mettre la somme sur i à l'intérieur.

3 Calculer d'abord S_n puis faire des dessins pour comprendre quels sont les indices pris en compte dans T_n, U_n, etc.

4 Pour R_n, deux possibilités : utiliser $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, ou utiliser la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Pour $S_{n,p}$, regarder quelques exemples à l'aide du triangle de Pascal et conjecturer une formule simple.

6 Distinguer les cas $\lambda + \mu = / \neq 0$, puis $\lambda = / \neq 0$.

7
- Utiliser que $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$.
- Utiliser que $k.k! = (k+1-1)k!$.
- Déterminer a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$, puis introduire $u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et reconnaître un télescopage faisant intervenir u_k.

8 Pour le **1.**, faire une récurrence sur n.

9 Regrouper les termes deux par deux.

10
- pour S_n, deux possibilités : calculer la somme $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$, puis exprimer S_n à l'aide de cette somme, ou bien calculer simplement la somme double.
- pour U_n, deux méthodes proposées : séparer la somme en deux ou faire un changement d'indices.

11
1. Développer simplement l'expression.
2. Penser qu'un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif.
3. Utiliser que $1 = \sqrt{a_k} \times \frac{1}{\sqrt{a_k}}$.

12
1. Utiliser le fait que 2^k est constant dans la seconde somme.
2. (a)
(b) Remplacer a_k par son expression.
(c) Prendre $a_k = 2^k$ et $B_k = k$.
3. (a) Penser que la dérivée d'une somme est la somme des dérivées.
(b) Penser que $f(x)$ est la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

13 Pour T_n, s'inspirer de l'exercice 4. Pour U_n, utiliser la formule $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

15 Comme le résultat est déjà donné, faire un raisonnement par récurrence.

16 Démontrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.

17
1.
2. (a) Calcul fait à l'exercice 16.
(b) Écrire une somme double et inverser les termes, puis utiliser la question précédente.

14
1.
2. Dire qu'il faut que $5\ell + 7(k-\ell) = 17$.

22
1. Distinguer les cas.
2. Distinguer $m = 1$, $m = -2$ et le reste.

23 Il faut ici faire une analyse-synthèse !