N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Chapitre 2
Calculs sur les réels et trigonométrie

Table des matières

À l'opposé du chapitre précédent, ici on se place dans le monde des réels.

1 Calculs dans $\mathbb{R}$

1.1 Inégalités

Proposition 1

Soient a, b, c, d 4 réels.

1. si $a < b$, alors $a \leqslant b$,
2. si a et b sont entiers et $a < b$, alors $a \leqslant \boxed{b-1}$,
3. si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + b \leqslant b + x \leqslant b + d$,
4. si $a \leqslant b$ et $c < d$, alors $a + c < b + d$,
5. si $0 < a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$,
6. si $a \leqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$,
7. si $a < b$ et $c > 0$, alors $ac < bc$,
8. si $a \in [0, 1]$, $a^2 \leqslant a$ et si $a \geqslant 1$, $a^2 \geqslant a$.
9. si $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ et si $a = d$, alors $a = b = c = d$.

Remarque 2

- Dans la proposition 5., attention au fait que les deux réels doivent être de même signe : $-1 < 1$ et $\dfrac{1}{-1} < \dfrac{1}{1}$.
- Dans la proposition 9., on l'utilise souvent de cette manière : on établit une suite d'inégalités :
$$a \leqslant \cdots \leqslant \cdots \leqslant \cdots \leqslant b,$$
et on s'intéresse au cas d'égalité entre a et b. On écrit alors

  « Il y a égalité entre a et b s'il y a égalité dans toutes les inégalités. »
- On ne soustrait pas les inégalités !

Une conséquence du 9. est la

Proposition 3

Soient $(a_1, \dots, a_n)$ des réels positifs ou nuls.

Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, alors $a_1 = \dots = a_n = 0$.

1.2 Valeur absolue

Définition 4

Soit x un nombre réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$, est définie comme suit :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0, \\ -x \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Exemple 5

- $|3| = 3$, $|-2| = 2$.
- La valeur absolue représente la distance à 0 d'un réel.

Proposition 6

Soit x un nombre réel. Alors

(i) $|x| \geqslant 0$,

(ii) $|x| = \sqrt{x^2}$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- si $x \geqslant 0$, $|x| = x \geqslant 0$, et $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = x^2 \end{cases}$ donc $\sqrt{x^2} = x = |x|$,
- si $x \leqslant 0$, $|x| = -x \geqslant 0$, et $\begin{cases} -x \geqslant 0 \\ x^2 = (-x)^2 \end{cases}$ donc $\sqrt{x^2} = -x = |x|$.

■

Remarque 7

$(a^2 = b^2)$ n'implique pas $(a = b)$! En revanche, si les quantités sont positives, si !

Proposition 8

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. L'équation $|x| = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet
   - 0 solution si $a < 0$,
   - 1 solution si $a = 0$,
   - 2 solutions si $a > 0$, $x = a$ ou $x = -a$.
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| = |y| \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$.
3. Si $a > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a$$
$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant a \Leftrightarrow x \leqslant a \text{ et } x \geqslant -a.$$

Point de méthode 9

Pour manipuler des équations ou des inéquations avec des valeurs absolues, essentiellement deux méthodes :

- Disjoindre les cas pour faire disparaître les valeurs absolues,
- Passer au carré ! Comme les valeurs absolues sont positives, $|a| = |b| \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Exercice 10

Résoudre

- $|x - 1| = |2x - 3|$
- $|x - 1| \geqslant |x + 1|$.

Proposition 11 (Inégalité triangulaire)

Soient x et y deux réels.
Alors $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ avec égalité si et seulement si x et y sont de même signe.

1.3 Plus grand élément, plus petit élément

Définition 12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $K \in R$.

1. On dit que K est **un** majorant de A si

$$\forall a \in A,\ a \leqslant K.$$

2. On dit que K est **un** minorant de A si

$$\forall a \in A,\ a \geqslant K.$$

Remarque 13

Il n'y a pas unicité d'un majorant. Par exemple, 1 et 42 sont des majorants de $]0,1[$.

Définition 14

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, et $K \in R$.

1. On dit que K est un plus grand élément de A si C est un majorant de A **et** $K \in A$.
2. On dit que K est un plus petit élément de A si C est un minorant de A **et** $K \in A$.

Exercice 15

Traduire les propositions précédentes avec des quantificateurs.

Proposition 16

1. Lorsqu'il existe, le plus grand élément de A est unique. On le note alors $\max(A)$.
2. Lorsqu'il existe, le plus petit élément de A est unique. On le note alors $\min(A)$.

Démonstration

Soient K et K' deux plus grands éléments de A. Alors $K \leqslant K'$ car K' majore A et $K \in A$. De même, $K' \leqslant K$ car K majore A et $K' \in A$. Donc $K = K'$. ■

Sur la notion de plus grand élément, il y a la proposition suivante :

Proposition 17

1. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
2. Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
3. Tout ensemble fini de réels admet un plus grand et un plus petit élément.

Remarque 18

1. La première proposition équivaut au principe de récurrence.
2. On peut aussi adapter la proposition à $\mathbb{Z}$

1.4 Partie entière

Définition 19

Soit $x \in \mathbb{R}$.
La partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, ou parfois $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Remarque 20

L'existence de ce plus grand entier vient du fait que $\{p \in \mathbb{Z},\ p \leqslant z\}$ est une partie non vide, majorée de $\mathbb{Z}$ qui admet donc un plus grand élément.

Exemple 21

$\lfloor 1,8 \rfloor = 1,\ \lfloor \pi \rfloor = 3.$
$\lfloor -3,4 \rfloor = -4.$

Remarque 22

On utilise parfois (en informatique notamment) la partie entière supérieure, $\lceil x \rceil$, qui désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x :

$$\lceil 1,2 \rceil = 2,\ \lceil -2,5 \rceil = -2,\ \lceil 8 \rceil = 8 = \lfloor 8 \rfloor.$$

Proposition 23 (Caractérisations de la partie entière)

Soit x un réel, k un entier relativ.

1. $k = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow k \leqslant x < k+1.$
   ($\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier satisfaisant cette inégalité)
2. $k = \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow x - 1 < k \leqslant x.$

Exemple 24

1. On utilise souvent la partie entière pour expliciter l'existence d'un entier tel que...

   « Montrer que : $\forall M > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}^n \geqslant M$. »

   Soit $M > 0$.

   ...au brouillon...
   On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{e}^n \geqslant M$. On remarque que $e^n \geqslant M \Leftrightarrow n \geqslant \ln(M)$.

   Posons $n_0 = \lfloor \ln(M) \rfloor + 1$.
   Alors $n_0 \geqslant \ln(M) - 1 + 1 = \ln(M)$, donc $\mathrm{e}^{n_0} \geqslant \mathrm{e}^{\ln(M)} = M$.
2. Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels et $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} a_k = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k}.$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Exercice 25

1. Démontrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. A-t-on pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$?

1.5 Borne supérieure, borne inférieure

Question : $]0,1[$ a-t-il un plus grand élément ? Non ! Mais 1 a un rôle particulier...

Définition 26

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On note B l'ensemble des minorants de A et C l'ensemble des majorants de A.

1. Si B admet un plus grand élément α, on dit que α est la **borne inférieure** de A et on note $\alpha = \inf(A)$.
2. Si C admet un plus petit élément β, on dit que β est la **borne supérieure** de A et on note $\beta = \sup(A)$.

Exemple 27

1. On considère $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Proposition 28

Si A admet un plus grand (resp. un plus petit) élément, alors A admet une borne supérieure (resp. inférieure) et alors $\sup(A) = \max(A)$ (resp. $\inf(A) = \min(A)$).

On a alors la propriété fondamentale, admise :

Proposition 29

Toute partie **non vide**, majorée, de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure.

Remarque 30

1. C'est une propriété que l'on ne peut pas démontrer car elle vient de la **construction** de $\mathbb{R}$: or, nous n'avons jamais construit $\mathbb{R}$.
2. Il existe des ensembles dans lesquels la propriété de la borne supérieure n'est pas vraie : $\mathbb{Q}$ par exemple !

Corollaire 31

Toute partie **non vide**, minorée, de $\mathbb{R}$, admet une borne inférieure.

Démonstration

Deux démonstrations de ce corollaire, l'une qui est vraie dans un cadre très général, l'autre liée à la structure de $\mathbb{R}$.

1. Preuve générale.
   Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.
   Notons B l'ensemble des minorants de A. Alors
   - B est non vide car A est minorée (donc possède un minorant)
   - B est majorée car A possède au moins un élément a et $\forall b \in B$, $b \leqslant a$.

   Donc, par la propriété de la borne supérieure, B admet une borne supérieure m.
   Démontrons que $m = \inf(A)$.
   - Soit $a \in A$. Alors a est un majorant de B, donc, comme $m = \sup(B)$, $m \leqslant a$.
     Donc m est un minorant de A.
   - Soit M un autre minorant de A. Alors $M \in B$, mais $m = \sup(B)$ donc $M \leqslant m$.
     Donc m est le plus grand des minorants de A.

   Donc A admet bien une borne inférieure !
2. Preuve utilisant la structure de $\mathbb{R}$.
   Soit A une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$.
   Considérons $B = \{-x, x \in A\}$. Alors
   - B est non vide.
   - si m est un minorant de A, alors pour tout x de A, $m \leqslant x$ donc pour tout x de A, $-x \leqslant -m$, donc B est majorée par $-m$.

   Donc B admet une borne supérieure s. Démontrons que $-s = \inf(A)$.
   - déjà, pour tout y de B, $y \leqslant s$.
     Donc, pour tout x de A, $-x \leqslant s$, i.e. $-s \leqslant x$, donc $-s$ est un minorant de A.
   - soit t un autre minorant de A. Alors $-t$ est un majorant de B, donc, comme s est la borne supérieure de B, $s \leqslant -t$, donc $t \leqslant -s$, donc $-s$ est bien le plus grand des minorants de A.

   Donc A admet une borne inférieure.

■

2 Trigonométrie

Le but de cette section est simplement de donner et de manipuler certaines formules mettant en jeu la trigonométrie. Nous ne démontrerons pas énormément de choses, et ferons surtout des calculs de base : certains calculs se font réellement bien avec les nombres complexes !

Proposition 32

Soit (x, y) un point du cercle trigonométrique. Alors il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. On dit que le cercle trigonométrique est paramétré par cosinus et sinus.

Définition 33

Soit α un réel non nul, x et y deux réels. On dit que x et y sont congrus modulo α si et seulement s'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = y + k\alpha$. On note $x = y[\alpha]$ ou $x \equiv y[\alpha]$.
On note $\alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$, et $x + \alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{x + k\alpha,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Remarque 34

1. $x = y[\alpha]$ si et seulement si $y = x[\alpha]$.
2. Ainsi, « x et y sont congrus modulo α » $\Leftrightarrow x - y \in \alpha\mathbb{Z} \Leftrightarrow y \in x + \alpha\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in y + \alpha\mathbb{Z}$.
3. Deux réels sont congrus modulo 1 si et seulement s'ils ont même partie fractionnaire.

Proposition 35

Soient α et β deux réels. Alors :

1. $\cos(\alpha) = \cos(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta[2\pi]$ ou $\alpha = -\beta[2\pi]$,
2. $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta[2\pi]$ ou $\alpha = \pi - \beta[2\pi]$,
3. $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ et $\sin(\alpha) = \sin(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta[2\pi]$.

Définition 36

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On définit $\tan(\theta)$, appelée tangente de θ, par $\tan(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$.

Remarque 37

On note, parfois, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\operatorname{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Attention au fait que cotan et tan n'ont pas le même ensemble de définition.

Proposition 38 ((Valeurs remarquables))

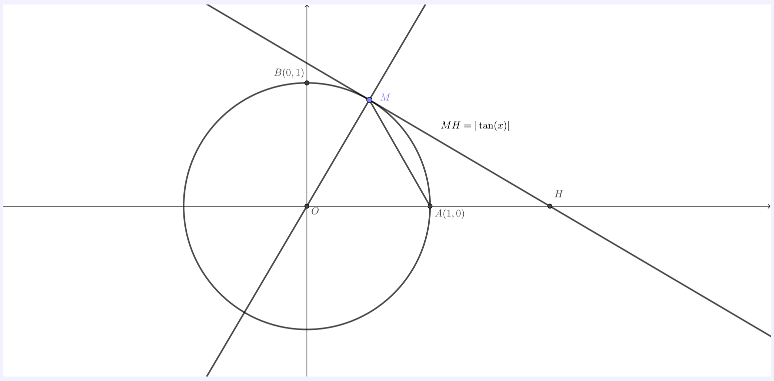
Ces valeurs sont à connaître

θ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	non définie

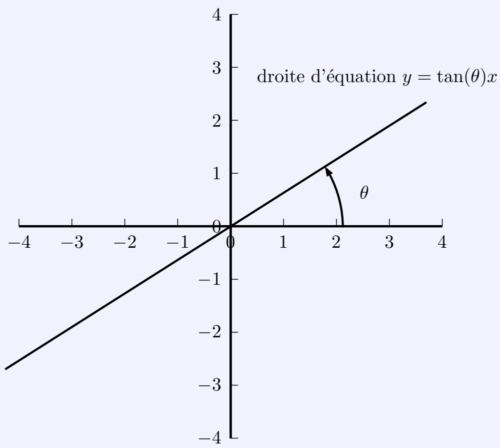
Remarque 39

La tangente a une interprétation graphique :

- Déjà, elle se lit sur le cercle trigonométrique :



- Ensuite, si on prend la droite passant par 0 et faisant l'angle θ avec l'axe des abscisses, cette droite est d'équation $y = \tan(\theta)x$:



Proposition 40 (transformations de $\sin / \cos / \tan$ – à savoir retrouver !)

On a les relations suivantes

θ	$\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$-\theta$	$-\sin(\theta)$	$\cos(\theta)$	$-\tan(\theta)$
$\theta+\pi$	$-\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$\tan(\theta)$
$\pi-\theta$	$\sin(\theta)$	$-\cos(\theta)$	$-\tan(\theta)$
$\theta+\dfrac{\pi}{2}$	$\cos(\theta)$	$-\sin(\theta)$	$-\text{cotan}(\theta)$

Proposition 41 (Équations avec des $\sin / \cos \tan$)

Soient θ et φ deux réels.

1. $\sin(\theta) = \sin(\varphi)$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \pi - \varphi + 2k\pi.$$
2. $\cos(\theta) = \cos(\varphi)$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = -\varphi + 2k\pi.$$
3. $\tan(\theta) = \tan(\varphi)$ si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \varphi + k\pi.$$

Exercice 42

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sin(\theta) = \dfrac{1}{2}$,
2. $\sin(\theta) \leqslant \dfrac{1}{2}$,
3. $\sin(\theta)^2 \leqslant 3\cos(\theta)^2$.

Corollaire 43

Dans toute la proposition, (a, b, p, q) sont des réels, choisis tels que les expressions soient bien définies.

1. (formules avec des carrés)
   (a) $\boxed{\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1}$
   (b) $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
2. (sin / cos / tan de sommes) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors
   (a) Sommes
$$\boxed{\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$
$$\boxed{\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$
   (b) Différences
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

(c) Duplication

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)\\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a)\\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}\end{aligned}$$

3. (Formules de linéarisation)

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}\\ \sin(a)\sin(b) &= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}\\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}.\end{aligned}$$

4. (Factorisation)

$$\begin{aligned}\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \cos(p)-\cos(q) &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)+\sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\end{aligned}$$

5. (Formules d'arc moitié) Si $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$,

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}.$$

Démonstration

Les trois formules encadrées sont les plus fondamentales, elles viennent de la définition même de l'exponentielle complexe et de sa multiplicativité. On va expliquer comment obtenir les autres à partir ce celles-ci.

1. Pour la formule reliant tan et cos, on remarque que

$$1+\tan^2(a) = 1 + \frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{\cos^2(a)+\sin^2(a)}{\cos^2(a)} = \frac{1}{\cos^2(a)}.$$

2. Pour $\tan(a+b)$, on écrit

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.\end{aligned}$$

 N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

L'obtention des formules avec les $-$ et les 2 est alors immédiate.

3. On explique pour les formules de linéarisation la méthode générale :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

En additionnant les deux lignes, on obtient

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b),$$

d'où la première formule de linéarisation. La seconde s'obtient en soustrayant les deux lignes, et la dernière en faisant la même chose avec $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$.

4. L'idée est de trouver a et b tels que $p = a+b$ et $q = a-b$. Si c'est le cas,

$$\cos(p) + \cos(q) = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

Mais $\begin{cases} a+b=p \\ a-bq \end{cases}$ est un système linéaire, de solutions $a = \dfrac{p+q}{2}$ et $b = \dfrac{p-q}{2}$, d'où la formule !

5. Si $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$, alors

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos\left(\frac{2a}{2}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{a}{2}\right)\left[1 - \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}\right]\\ &= \cos^2\left(\frac{a}{2}\right)(1-t^2)\\ &= \frac{1-t^2}{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}}\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ car } 1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

Ensuite, $\tan(a) = \tan\left(2\dfrac{a}{2}\right) = \dfrac{2t}{1-t^2}$, et

$$\sin(a) = \tan(a)\cos(a) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

■

Exercice 44

Quelques exercices d'application :

(i) calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

(ii) soient ϕ et ω deux réels. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos(\phi t)\cos(\omega t)dt.$$

Cette question est très importante en physique.

Exemple 45

(propriété importante en physique)

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ \exists (A,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R},\ a\cos(t)+b\sin(t)=A\cos(t-\varphi).$$

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Analyse. On suppose qu'il existe A et φ tels que pour tous t dans $\mathbb{R}$,

$$\cos(t)+b\sin(t)=A\cos(t-\varphi)=A\cos(t)\cos(\varphi)+A\sin(t)\sin(\varphi).$$

Pour $t=0$, $a=A\cos(\varphi)$,
Pour $t=\frac{\pi}{2}$, $b=A\sin(\varphi)$.
alors

$$a^2+b^2=A^2\cos^2(\varphi)+A^2\sin^2(\varphi)=A^2,$$

donc, comme $A\geqslant 0$, $A=\sqrt{a^2+b^2}$.
Donc

$$\begin{cases}\cos(\varphi)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin(\varphi)=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{cases}$$

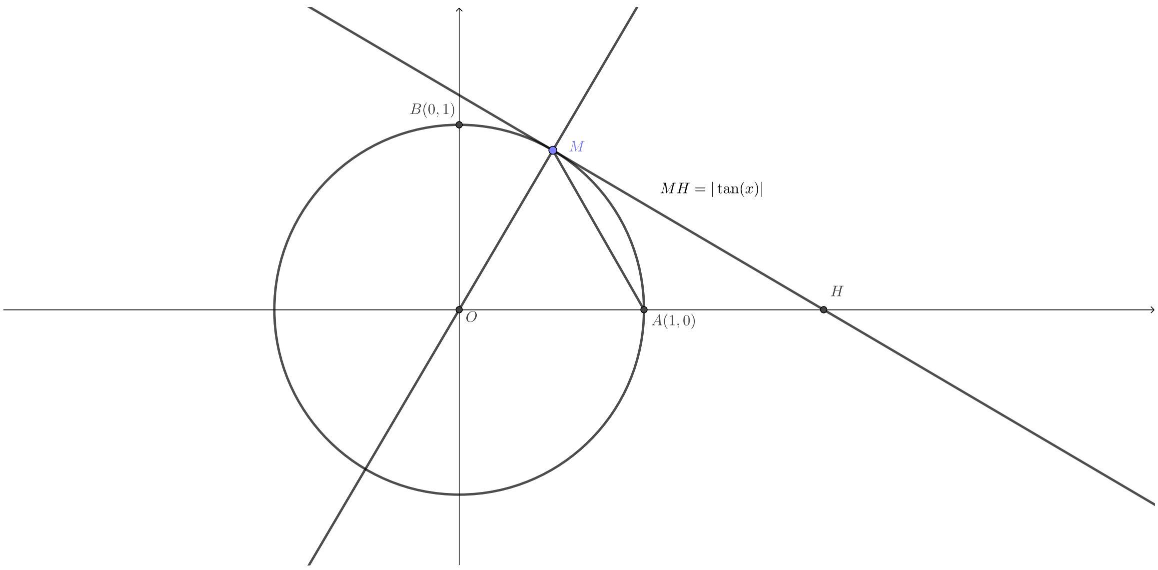
φ est donc unique modulo 2π.
Synthèse à peu près évidente !

Proposition 46 (Quelques propriétés importantes)

1. pour tout x réel, $|\sin(x)|\leqslant|x|$.
2. $\dfrac{\sin(x)}{x}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}=1$.
3. les fonctions sin et cos sont dérivables, de dérivées respectives cos et $-\sin$.
4. la fonction tangente est dérivable, de dérivée $\dfrac{1}{\cos^2}=1+\tan^2$.

Démonstration

Ici, nous ne ferons que des preuves géométriques.



1. L'aire du triangle OAM, égale à $\dfrac{1}{2}|\sin(x)|$, est inférieure à l'aire de la portion de disque OAM, égale à $\dfrac{1}{2}|x|$. (on rappelle que l'aire du disque est égale à $\dfrac{1}{2}2\pi$)
2. Soit $|x| \leqslant 1$, en particulier $x \notin \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ (nous verrons plus tard, lorsque nous définirons la notion de limite, que comme la notion de limite est une notion locale, on peut choisir de se placer au voisinage de 0). L'aire de la portion de disque OAM est inférieure à l'aire du triangle OHM, égale à $\dfrac{1}{2}|\tan(x)|$. Ainsi, $|\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant \dfrac{|\sin(x)|}{|\cos(x)|}$. Donc
$$|\cos(x)|.|x| \leqslant |\sin(x)| \leqslant |x|,$$
soit, si $x \neq 0$,
$$|\cos(x)| \leqslant \frac{|\sin(x)|}{|x|} \leqslant 1,$$
donc, par théorème d'encadrement, $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Comme x et $\sin(x)$ sont de même signe lorsque $x \in [-1,1]$, $\dfrac{\sin(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$. Alors
$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(a)\cos(h)+\sin(h)\cos(a)-\sin(a)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}\cos(a) + \frac{\cos(h)-1}{h}\sin(a).$$
Or, $\dfrac{\sin(h)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{\cos(h)-1}{h} = \dfrac{-2\sin^2(h/2)}{h} = -\sin\dfrac{h}{2}\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc
$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \cos(a).$$
De même,
$$\frac{\cos(a+h)-\cos(a)}{h} = \frac{\cos(a)\cos(h)-\sin(a)\sin(h)-\cos(a)}{h} = \cos(a)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(a)\frac{\sin(h)}{h} \underset{h\to+\infty}{\longrightarrow} -\sin(a).$$
4. Il s'agit de la dérivée d'un quotient !

■

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 47 (Propriétés de sinus)

1. sin est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1,1]$
2. sin est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
3. sin est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$.
4. Pour tout x réel, $(\sin(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in [2p\pi, \pi + 2p\pi])$.
5. sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Pour tout entier n, sin est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
7. sin est croissante sur les intervalles de la forme $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ où $k \in \mathbb{Z}$, et décroissante sur les intervalles de la forme $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, où $k \in \mathbb{Z}$.
8. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
9. sin n'a pas de limite en $\pm\infty$
10. Inégalités classiques : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leqslant x$ et $\forall x \in [0, \pi/2],\ \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Proposition 48 (Propriétés de cosinus)

Soit $f : x \mapsto \cos(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1, 1]$
2. f est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
3. f est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
4. $(\cos(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \left(\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2p\pi, \frac{\pi}{2} + 2p\pi\right]\right)$.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. pour tout entier n, f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.
7. f est croissante sur les intervalles de la forme $[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$ et décroissante sur les intervalles de la forme $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$.
8. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
9. f n'a pas de limite en $\pm\infty$
10. Inégalités classiques : $\forall x \in [0, \pi/2],\ 1 - \frac{2x}{\pi} \leqslant \cos(x)$.
11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Proposition 49 (Propriétés de tangente)

Soit $f : x \mapsto \tan(x)$.

1. f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$
2. f est π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(x+\pi) = \tan(x)$.
3. f est impaire : $\tan(-x) = -\tan(x)$.
4. $(\tan(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \left(\exists p \in \mathbb{Z},\ x \in \left[p\pi, p\pi + \frac{\pi}{2} \right[\right)$.
5. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.
6. f est croissante sur tout intervalle de la forme $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$, où $k \in \mathbb{Z}$.
7. Valeurs particulières : cf. cours sur les complexes.
8. f n'a pas de limite en $\pm\infty$, mais $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$.
9. Inégalités classiques : $\forall x \in [0, \pi/2], \tan(x) \geqslant x$.
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = 1$.

Proposition 50 (Formules de l'arc moitié)

Soit x un réel qui ne soit pas un multiple de π. Notons $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Alors $\sin(x) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos(x) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tan(x) = \dfrac{2t}{1-t^2}$.