N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

TD 02
Calculs dans $\mathbb{R}$ et trigonométrie

1 Exercices corrigés en classe

Exercice 1. *Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique*. ●◐○ Soient x et y deux réels positifs, a, g et h les trois réels définis par

$$a = \frac{x+y}{2},\ g = \sqrt{xy},\ \frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{2}.$$

Comparer a, g et h.

Exercice 2. ●○○ Soient x et y deux réels positifs.

1. (Une inégalité triangulaire) Montrer que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2. En déduire que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

Exercice 3. ●◐○ Soit $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair.

2. En déduire que $\left\lfloor (2+\sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

Exercice 4. ●◐○ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|.$$

Démontrer que pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+y\|_1 \leqslant \|x\|_1 + \|y\|_1 \text{ et } \|x+y\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty .$$

Exercice 5. ●●○ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $S_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k\theta)$. En considérant $\sin(\theta)S_n$, calculer S_n.

2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 6. ●○○ Démontrer que pour tous x et y réels, pour tout $\lambda > 0$, $xy \leqslant \dfrac{x^2}{2\lambda} + \dfrac{\lambda y^2}{2}$.

Exercice 7. ●◐○ Soient a et b deux réels, on note $\max(a, b)$ le maximum des deux nombres a et b.

1. Montrer que
$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}.$$

2. En déduire une expression avec les valeurs absolues pour $\min(a, b)$, le minimum de a et de b.

3. Que vaut $\min(a, b) + \max(a, b)$?

Pour tout nombre réel x, on note $x^+ = \max(0, x)$ et $x^- = \max(0, -x)$, appelées respectivement parties positive et négative de x.

4. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.

Exercice 8. ●●○ Soient x et y deux réels, n un entier naturel. Comparer $\lfloor x + y \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$, et comparer $\lfloor nx \rfloor$ et $n\lfloor x \rfloor$.

Exercice 9. ●●○ Soit x un réel, soit $m \geqslant 1$ un entier. Montrer que
$$\lfloor mx \rfloor = \sum_{k=0}^{m-1} \left\lfloor x + \frac{k}{m} \right\rfloor .$$

Exercice 10. ●●○ Montrer que pour tout entier n,
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

Exercice 11. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*. ●●○ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

On note
$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

1. Soit alors x un réel. Développer $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2$ et l'écrire en fonction de A, B et C.

2. Déduire de l'étude du signe de la fonction f l'inégalité désirée.

3. Soient a_1, a_2,..., a_n une suite de réels strictement positifs. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2.$$

Exercice 12. ●●● Montrer que pour tous réels strictement positifs (a, b) et que pour tout entier n,
$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$$

3 Trigonométrie

Exercice 13. *Quelques équations trigonométriques*. ●○○ – ●●◐

1. Résoudre les équations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\sin(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

(b) $\sin(2x) = \cos(x)$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(d) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

(e) $\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 1$

(f) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

(g) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(h) $\tan(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

(i) $\sqrt{\cos(x)} + \sqrt{\sin(x)} = 1$

(j) $\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) = 1$

2. Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x dans $\mathbb{R}$, sauf cas à préciser :

(a) $\tan(x) \leqslant \sqrt{3}$

(b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{2}$

(c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(d) $\sin(x) - \cos(x) \geqslant 1$

Exercice 14. *Valeurs non usuelles de fonctions trigonométriques*. ●◐○

1. En calculant $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, déterminer une valeur de $\cos(7\pi/12)$.

2. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$. En déduire une valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$, puis de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 15. ●◐○ Montrer les identités suivantes, en précisant pour quels réels elles sont valides.

1. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

2. $\tan(x) + \frac{1}{\tan(x)} = \frac{2}{\sin(2x)}$.

3. $\tan(x) - \frac{1}{\tan(x)} = -\frac{2}{\tan(2x)}$.

Exercice 16. ●●◐ Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, pour tous $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ réels,

$$\sum_{(\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \theta_k\right) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta_k).$$

N. Laillet
nlaillet.math@gmail.com

Indications

1 Vu que l'on demande de comparer, c'est que l'ordre ne doit pas dépendre de x et de y... tester alors avec $x = 1$ et $y = 2$.

2 **1.** Mettre au carré les deux côtés de l'égalité.

2. Distinguer les cas $x \leqslant y$ et $x \geqslant y$.

3 **1.** Développer et regrouper les k pairs et impairs.

2. Remarquer que $(2-\sqrt{3})^n$ est un réel dans $]0,1[$.

4 Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_1$, écrire la somme et utiliser l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité sur $\|\cdot\|_\infty$, penser que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|x_i| \leqslant \|x\|_\infty$.

6 Penser que l'on peut multiplier par 2λ et reconnaître une identité remarquable.

7 **1.** Disjoindre les cas.

2. Changer un $+$ en $-$

3. Faire simplement le calcul.

4.

8 **1.** Démontrer que $\lfloor x+y \rfloor \geqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ et penser à des nombres rationnels simples pour montrer qu'on n'a pas égalité.

2. Démontrer que $\lfloor nx \rfloor - n \leqslant n \lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$.

9 Écrire $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$. Remarquer alors que $\lfloor mx \rfloor = m \lfloor x \rfloor + c$, où c est à déterminer assez précisément.

10 Faire une récurrence : pour l'hérédité, étudier préc'isément la différence de deux termes, développer le numérateur et le dénominateur de la fraction : ne pas avoir peur de calculs un peu gros.

11 **1.** Développer simplement l'expression.

2. Penser qu'un polynôme de degré 2 de signe constant est de discriminant négatif.

3. Utiliser que $1 = \sqrt{a_k} \times \dfrac{1}{\sqrt{a_k}}$.

12 — Poser $x = \dfrac{a}{b}$, utiliser la formule du binôme de Newton.

— Vérifier que pour tout $y > 0$, $y + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$.

16 Faire une récurrence sur n.