 nlaillet.math@gmail.com

DM 01
à rendre le lundi 8 septembre
Durée conseillée : 2h

Rappel. Le DM doit comporter votre nom, votre prénom, le temps passé, l'aide reçue/le travail en groupe. Je me réserve le droit de ne pas corriger le DM si l'une de ces informations vient à manquer.
Faites très attention à la rédaction, et n'oubliez pas de DÉCLARER VOS VARIABLES !

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Démontrer proprement à chaque fois.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{1}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{2}$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{3}$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0 \tag{4}$$

Correction

(1) La première assertion est fausse. On montre $\neg(1)$:

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0.$$

Posons $x = -1$ et $y = -1$. Alors $x + y \leqslant 0$. Donc $\neq$ (1) est vraie, donc (1) est fausse.

(2) La deuxième assertion est vraie. Démontrons-le.
Soit $x \in \mathbb{R}$. **Posons** $y = 1 - x$. Alors $y \in \mathbb{R}$ et $x + y = x + 1 - x = 1 > 0$.
Donc (2) est vraie.

(3) La troisième assertion est fausse. Démontrons $\neg(3)$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y \leqslant 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. **Posons** $y = -1 - x$. Alors $x + y = -1 \leqslant 0$.
Donc $\neq$ (3) est vraie, donc (3) est fausse.

(4) La quatrième assertion est vraie. Démontrons-le.
Posons $x = 1$. Posons $y = 1$. Alors $x + y = 1 + 1 = 2 > 0$.
Donc (4) est vraie.

Exercice 2. Soit x un réel positif ou nul. Démontrer que $(\forall \varepsilon > 0, x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
On démontrera la contraposée.

Correction

Supposons que $x \neq 0$. Alors $x > 0$. Démontrons que

$$\exists \varepsilon > 0,\ x > \varepsilon.$$

Posons $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$ et $\frac{x}{2} < x$ donc $\varepsilon < x$.
La contraposée de la proposition étant vraie, la proposition est vraie : $(\forall \varepsilon > 0, x \leqslant \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.
Remarque : on n'est pas obligés d'écrire la contraposée. Il faut juste avoir en tête que la contraposée est $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ x > \varepsilon)$.

Exercice 3. *Décomposition de* 1 *comme somme d'inverses d'entiers*. On s'intéresse à la proposition suivante, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n,\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 \textbf{ et } a_1 < a_2 < \cdots < a_n. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

1. Pourquoi le résultat est-il évident sans l'hypothèse « $a_1 < \cdots < a_n$ » ?

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n$. Alors $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$, d'où le résultat désiré !

2. Étudier $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$.

Correction

$\mathcal{P}_1$ est vraie car $1 = \frac{1}{1}$. $\mathcal{P}_3$ est vraie car $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.
$\mathcal{P}_2$ semble fausse... démontrons-le, en démontrant la négation de $\mathcal{P}_2$. Soient a_1 et a_2 deux entiers tels que $a_1 < a_2$. Alors

- si $a_1 = 1$, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} > 1$,
- si $a_1 \geqslant 2$, $\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{1}{2}$, et $a_2 > 2$ donc $\frac{1}{a_2} < \frac{1}{2}$, donc $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} < 1$.

Dans tous les cas $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \neq 1$. D'où la négation de $\mathcal{P}_2$, donc $\mathcal{P}_2$ est fausse.

3. Démontrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Correction

On démontre le résultat par récurrence sur n.
Initialisation. $\mathcal{P}_3$ est vraie par la question précédente.
Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain n.
On dispose alors de n réels $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 \text{ et } a_1 < \cdots < a_n.$$

De plus, $a_1 > 1$, car sinon $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1$.
Posons alors $b_1 = 2$, et

$$b_2 = 2a_1,\ b_3 = 2a_2, \dots, b_{n+1} = 2a_n.$$

Alors $b_1 < b_2 < \cdots < b_{n+1}$, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_{n+1}} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\cdots+\frac{1}{2a_n}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 1 \text{ par hypothèse de récurrence.}\\ &= 1,\end{aligned}$$

d'où l'hérédité et le résultat !

Autre solution. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$a_1 = 2, a_2 = 4, \ldots, a_{n-2} = 2^{n-2},\ \ a_{n-1} = 6 \times 2^{n-4},\ \ a_n = 6 \times 2^{n-3}.$$

alors

$$\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_{n-2}} = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{1}{2^{n-2}}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2^{n-2}}.$$

Et

$$\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n} = \frac{2+1}{6\times 2^{n-3}} = \frac{3}{6\times 2^{n-3}} = \frac{1}{2^{n-2}},$$

d'où

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} = 1.$$

4. Démontrer que pour $n = 3$, il y a unicité d'une telle écriture. Y a-t-il unicité pour $n = 4$?

Correction

On sait déjà qu'il existe une solution : $2, 3, 6$.

On suppose qu'il existe 3 entiers (a_1, a_2, a_3) tels que $a_1 < a_2 < a_3$ et $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} = 1$.

Si on avait $a_1 \geqslant 3$, alors $a_2 \geqslant 4$ et $a_3 \geqslant 5$, donc $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} < 1$, absurde !

On en deduit que $a_1 = 1$ ou $a_1 = 2$. Mais si on avait $a_1 = 1$ alors on aurait $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} > 1$, absurde.

On en déduit que $\boxed{a_1 = 2}$.

Donc $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$.

Si on avait $a_2 \geqslant 4$, alors $a_3 \geqslant 5$ et $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} < \frac{1}{2}$, absurde !

Donc $a_2 = 3$, et $a_3 = 6$.

$\boxed{\text{Il y a donc unicité pour } n = 3.}$

Il n'y a en revanche pas d'unicité pour $n = 4$, car

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}.$$

En fait, d'autres solutions sont possibles (mais comme il fallait tâtonner, je ne m'attendais pas à ce que vous les trouviez !)

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$