DM 02 pour le lundi 15 septembre

Rappel. Le DM doit comporter votre nom, votre prénom, la formule choisie (écrite très clairement en début de DS), le temps passé, l'aide reçue/le travail en groupe. Je me réserve le droit de ne pas corriger le DM si l'une de ces informations vient à manquer.

Formules Je propose trois formules pour ce DM

- formule « bases » : faire l'ex. 1 ainsi que le Problème, qu. 1,2,3. *Durée conseillée : 2h.*
- formule « intermédiaire » : faire l'ex. 1, le Problème, questions 1 à 5. *Durée conseillée : 3h.*
- formule « complète » : tout faire ! *Durée conseillée : 4h.*

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout entier naturel n , il existe un unique couple (a_n, b_n) d'entiers relatifs tels que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $(1 - \sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$, où (a_n, b_n) est le couple introduit à la question précédente.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $a_n^2 - 2b_n^2$?
4. En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$.

Problème 1. Autour des nombres de Bernoulli

On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des nombres de Bernoulli :
$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0 \end{cases}$$

On admet qu'une telle relation définit une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le but de ce problème est d'étudier la suite des nombres de Bernoulli et notamment de comprendre la manière dont ils interviennent dans le calcul de sommes de puissances d'entiers.

A. Premiers calculs.

1. Calculer b_1, b_2, b_3, b_4 .
2. Démontrer que pour tout n entier supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.

B. Sommes de puissances d'entiers et nombres de Bernoulli.

Les nombres de Bernoulli ont d'abord été étudiés par Jacques Bernoulli (1654-1705) pour l'étude de sommes de la forme $1 + 2 + \dots + n$, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, etc.

Pour tous entiers naturels n et p , on définit la somme $S_p(n)$ comme suit : $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$.

3. Donner, sans justification, la valeur de $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On souhaite désormais déterminer une formule pour $S_p(n)$, avec p et n entiers, en fonction des nombres de Bernoulli.

B-I. Une première formule de récurrence

4. Montrer que pour tout couple d'entiers $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $S_{p+1}(n+1) = \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{j} S_j(n)$.

5. En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} - p! \sum_{j=0}^{p-1} \frac{S_j(n)}{j!(p+1-j)!}.$$

B-II. Expression de $S_p(n)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

Définissons, pour n et p entiers naturels, $T_p(n) = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$.

Le but des questions suivantes est de démontrer que pour tous n et p entiers, $S_p(n) = \frac{1}{p+1} T_p(n)$.

6. Démontrer que pour tous entiers naturels n et p ,

$$T_p(n+1) - T_p(n) = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j} b_k n^j = (p+1)n^p.$$

7. Conclure que pour tous n et p entiers naturels, $S_p(n) = \frac{1}{p+1} T_p(n)$.

8. Déterminer une expression de $\sum_{k=1}^n k^4$.

C. Nullité des b_k pour k impair

On admet le résultat suivant

Proposition 1

Soit P un polynôme tel que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $P(n) = 0$. Alors pour tout t dans $\mathbb{R}$, $P(t) = 0$.

9. Démontrer que

$$\forall p \geq 1, (p+1)b_p = (-1)^p \left(p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p+1}{k} b_k (-1)^{1+k} \right).$$

et que b_k est nul pour tout entier impair k .